

Lösungsvorschläge

1. Energieerhaltung (8 Punkte)

- (a) Reibungskraft: Die Kraft hängt von $\dot{\mathbf{r}}$ ab. Die Energie ist nicht erhalten, und die Kraft läßt sich nicht aus einem Potential ableiten.
- (b) Zentralkraft: Das Potential ist $U(\mathbf{r}) = \frac{k}{2}\mathbf{r}^2$, die Energie ist erhalten.
- (c) Lorentzkraft: Hier steht $\mathbf{F}$ stets senkrecht auf $\dot{\mathbf{r}}$. Es gibt kein Potential, die Energie ist aber trotzdem erhalten, weil keine Arbeit geleistet wird.
- (d) Hier gibt es ein Potential $U(\mathbf{r}, t) = -t\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$, dies ist aber zeitabhängig. Die Energie ist daher nicht erhalten.

Das Potential, falls es existiert, ist außerdem in allen Fällen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

2. Lenzscher Vektor (12 Punkte)

- (a) Die Bewegungsgleichungen in Polarkoordinaten lauten

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = F(r) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0.$$

Falls $r = \text{const}$ ist, folgt aus der zweiten Gleichung (Drehimpulserhaltung) die Konstanz von $\omega = \dot{\phi}$. Die erste Gleichung lautet dann

$$F(r) = -mr\omega^2$$

- (b) Für $r = \text{const}$, $\dot{\phi} = \omega$ und $z \equiv 0$ gilt

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \phi \\ r\omega \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2\omega \end{pmatrix}$$

Der Lenzsche Vektor ist also (mit $r^2 F(r) = -mr^3\omega^2$)

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{-1}{-mr^3\omega^2} \begin{pmatrix} mr^3\omega^2 \cos \phi \\ mr^3\omega^2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

(c) Es gilt

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\mathbf{L} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L})}{r^2 F(r)} - m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = 0,$$

da beide Spatprodukte zwei identische Vektoren enthalten und daher verschwinden. $\boldsymbol{\epsilon}$ steht also senkrecht auf $\mathbf{L}$ und liegt damit in der Bahnebene.

(d) Wo $r^2 = \mathbf{r}^2$ ein Extremum hat, gilt $\frac{d}{dt}r^2 = 2\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$. Dann ist

$$\mathbf{r} \times \boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L})}{r^2 F(r)} - \mathbf{r} \times \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}) - \mathbf{L}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^2 F(r)} = 0,$$

weil außerdem $\mathbf{r}$ senkrecht auf $\mathbf{L}$ steht. $\mathbf{r}$ ist also parallel zu $\boldsymbol{\epsilon}$.

(e) Drehimpulserhaltung: $\frac{d}{dt}\mathbf{L} = 0$. Die Bewegungsgleichung ist mit $f(r) = r^2 F(r)$:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{f(r)}{mr^3} \mathbf{r}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= -\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{f(r)} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\ &= -\frac{\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{f(r)} + f'(r) \dot{r} \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{f(r)^2} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \dot{r} \frac{\mathbf{r}}{r^2} \\ &= -\frac{\mathbf{r} \times (m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})}{mr^3} - \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} + \frac{\mathbf{r}}{r^2} \mathbf{e}_r \cdot \dot{\mathbf{r}} + f'(r) \dot{r} \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{f(r)^2} \\ &= -\frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r^3} - \frac{\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})}{r^3} + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^3} + f'(r) \dot{r} \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{f(r)^2} \\ &= f'(r) \dot{r} \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{f(r)^2} \end{aligned}$$

Weil $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}$ im allgemeinen ungleich Null ist (sofern der Massepunkt nicht in Ruhe bleibt), muß entweder $\dot{r}$ verschwinden (Kreisbahn), oder $f'(r) = 0$ sein, was $F(r) \propto \frac{1}{r^2}$ bedeutet.