Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **Blatt 13** 26. 1. 2001

Abgabe: Mittwoch, 24. 1. bis 10:30

1. Fluchtbahnen (4 Punkte)

Zeigen Sie: Für $\epsilon > 1$ hat eine Planetenbahn

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon\cos\phi}$$

die Form einer Hyperbel

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Drücken Sie a, b und x_0 durch p und ϵ aus. Wie sieht die Bahnkurve im Grenzfall $\epsilon \gg 1$ aus?

2. Komet (6 Punkte)

Ein Komet (reduzierte Masse μ) bewegt sich auf seiner Bahn im Gravitationsfeld der Sonne:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{1}$$

(a) Wie groß ist seine Geschwindigkeit v_0 im Abstand r_0 von der Sonne, wenn die Bahn gerade nicht mehr geschlossen ist (Parabelbahn)?

(b) Wie groß ist die Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn mit Radius r_0?

(c) Mit welcher Relativgeschwindigkeit kann also ein Komet auf einer Parabelbahn maximal auf die Erde auftreffen?

[Die Erdbahn ist beinahe kreisförmig mit Radius 1 AE = 150×10^6 km. Ein Jahr hat $\pi \times 10^7$ s.]

3. Planetenbewegung: Alternative Lösung (6 Punkte)

Auf dem vorigen Blatt haben Sie gezeigt, daß im Gravitationsfeld (1) der Lenzsche Vektor

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{r^2 F(r)} - \mathbf{e}_r$$

zeitlich konstant ist.

Wählen Sie ein Koordinatensystem, so daß der Drehimpulsvektor in Richtung der z-Achse und der Lenzsche Vektor in Richtung der x-Achse zeigt. Stellen Sie die Gleichungen für die Erhaltung von Drehimpuls $\mathbf{L} = (0, 0, L)$ und Lenz-Vektor $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon, 0, 0)$ in Polarkoordinaten auf, d.h. ausgedrückt durch $r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}$. Eliminieren Sie in diesen Gleichungen alle Zeitableitungen und bestimmen Sie damit die Bahnkurve $r(\phi)$ für einen Planeten im Gravitationsfeld, ohne eine Differentialgleichung lösen zu müssen oder ein Integral zu berechnen.

4. Eulersche Formel (4 Punkte)

Die Matrix I ist durch

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie alle Potenzen von I, also I^2, I^3, ...

(b) Für quadratische Matrizen kann man ebenso wie für reelle und komplexe Zahlen Potenzreihen einführen. So ist für eine beliebige quadratische Matrix A

$$\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

Zeigen Sie, daß

$$\exp(I\phi) = E \cos\phi + I \sin\phi$$

ergibt, also die Matrix einer Drehung um den Winkel ϕ. (E bezeichnet hier die 2×2-Einheitsmatrix, und I^0 wird gleich E definiert.)