

Lösungsvorschläge

1. Fluchtbahnen (4 Punkte)

Analog zur Vorlesung: Mit

$$x = r \cos(\phi - \phi_0) \quad \text{und} \quad y = r \sin(\phi - \phi_0)$$

gilt

$$r(\phi) + \epsilon x = p,$$

und daraus folgt mit quadratischer Ergänzung

$$(\epsilon^2 - 1) \left(x - \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1} \right)^2 - y^2 = \frac{p^2}{\epsilon^2 - 1}$$

Für $\epsilon > 1$ wird das zu

$$\frac{\left(x - \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1} \right)^2}{\left(\frac{p}{\epsilon^2 - 1} \right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \right)^2} = 1$$

umgeformt, also

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit

$$x_0 = \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1}, \quad a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}.$$

Für $\epsilon \gg 1$ lautet die Bahnkurve näherungsweise

$$r(\phi) = \frac{p}{\epsilon \cos \phi}$$

Wegen $x = r \cos \phi$ bedeutet das

$$x = \frac{p}{\epsilon} = \text{const.}$$

Die Bahnkurve ist also eine Gerade parallel zur y -Achse.

2. Komet (6 Punkte)

(a) Für eine Parabel ist die Exzentrizität $\epsilon = 1$, also die Gesamtenergie

$$E = -\frac{\alpha}{2p}(1 - \epsilon^2) = 0$$

Das bedeutet

$$0 = \frac{\mu}{2}v_0^2 - \frac{\alpha}{r_0}$$

also

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{\mu r_0}}.$$

(b) Für eine Kreisbahn ist $\epsilon = 0$ und $p = r_0$, also

$$E = -\frac{\alpha}{2r_0},$$

also

$$-\frac{\alpha}{2r_0} = \frac{\mu}{2}v_K^2 - \frac{\alpha}{r_0}$$

d.h.

$$v_K = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu r_0}}.$$

(c) Unabhängig von der Lage der Bahn des Kometen gilt bei $r = r_0$ die Relation $v_0/v_K = \sqrt{2}$. Die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn ist

$$v_K = \frac{2\pi r_0}{1 \text{ a}} = \frac{2\pi \times 150 \times 10^6 \text{ km}}{\pi \times 10^7 \text{ s}} = 30 \text{ km/s}.$$

Die maximale Relativgeschwindigkeit wird erreicht, wenn der Komet der Erde frontal entgegenkommt. (Dann befindet er sich im Perihel seiner Bahn.) Es gilt daher

$$v_{\max} = (\sqrt{2} + 1)v_K = 72 \text{ km/s}.$$

3. Planetenbewegung (6 Punkte)

Der Lenzsche Vektor lautet, ausgedrückt durch $r(t)$ und $\phi(t)$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon} &= \frac{1}{\alpha} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - \frac{1}{r} \mathbf{r} \\ &= \frac{\mu}{\alpha} \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{\phi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu}{\alpha} \begin{pmatrix} r^2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi + r^3 \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ -r^2 \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r^3 \dot{\phi}^2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dies ist konstant gleich $(\epsilon, 0, 0)$. Zusammen mit der Drehimpulserhaltung ergibt das die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} L &= \mu r^2 \dot{\phi} \\ \epsilon &= \frac{\mu}{\alpha} r^2 \dot{r} \dot{\phi} \sin \phi + \left(\frac{\mu}{\alpha} r^3 \dot{\phi}^2 - 1 \right) \cos \phi \\ 0 &= -\frac{\mu}{\alpha} r^2 \dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + \left(\frac{\mu}{\alpha} r^3 \dot{\phi}^2 - 1 \right) \sin \phi \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten in die beiden anderen Gleichungen liefert mit $p = \frac{L^2}{\mu\alpha}$:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{L}{\alpha} \dot{r} \sin \phi + \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \cos \phi \\ 0 &= -\frac{L}{\alpha} \dot{r} \cos \phi + \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \sin \phi \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\sin \phi$ und die zweite mit $\cos \phi$ und addiert man beide Zeilen, so erhält man

$$\epsilon \cos \phi = \frac{p}{r} - 1,$$

also

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$

4. Eulersche Formel (4 Punkte)

(a) Es gilt $I^2 = -E$ und damit

$$I^{2n} = (-1)^n E \quad \text{sowie} \quad I^{2n+1} = (-1)^n I.$$

(b)

$$\begin{aligned} \exp(I\phi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\phi I)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} I^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} I^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} I^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\phi^{2k}}{(2k)!} E + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\phi^{2k+1}}{(2k+1)!} I \\ &= E \cos \phi + I \sin \phi. \end{aligned}$$