Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian — **Blatt 14** — 2. 2. 2001

Abgabe: Mittwoch, 31. 1. bis 10:30

1. Erzwungene Schwingungen (8 Punkte)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \tag{1}$$

für die folgenden Funktionen $f(t)$ an:

(a) $f(t) = ae^{-bt}$

(b) $f(t) = a\cos(\omega t)$

(c) $f(t) = a\cos^2(\omega t)$

(d) $f(t) = at^3 + bt^2$

Hier ist $a, b, \omega \in \mathbb{R}$.

(Verwenden Sie z.B. einen „Ansatz vom Typ der rechten Seite“, um eine partikuläre Lösung zu bestimmen.)

2. Partikuläre Lösung (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (1) läßt sich folgendermaßen berechnen: (4 Punkte)

$$x(t) = \int^t dt'\, e^{i\omega(t-t')} \int^{t'} dt''\, e^{-i\omega(t'-t'')} f(t'') \tag{2}$$

Hinweis: Schreiben Sie

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \omega^2 x = \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)x$$

und setzen Sie $y(t) = (\frac{d}{dt} - i\omega)x(t)$. Sie erhalten eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung für $y(t)$, die Sie durch Variation der Konstanten lösen können.

(b) Verifizieren Sie die Lösungsformel (2) für $f(t) = at$. (2 Punkte)

Hinweis:

$$\int dt\, te^{\lambda t} = \frac{1}{\lambda^2}e^{\lambda t}(\lambda t - 1)$$

3. <u>Theta-Funktion</u> (6 Punkte)

Für $x \neq 0$ ist die θ-Funktion definiert durch

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Benutzen Sie die θ-Funktion, um die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > a \text{ und } x < b \\ 0 & \text{falls } x < a \text{ oder } x > b \end{cases}$$

mit $a < b$ für $x \neq a$ und $x \neq b$

(a) als Produkt zweier θ-Funktionen

(b) als Differenz zweier θ-Funktionen

(c) durch eine einzige θ-Funktion (und die Betragsfunktion)

darzustellen.