

Lösungsvorschläge

1. Erzwungene Schwingungen (8 Punkte)

Die allgemeine Lösung ist jeweils

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + x_p(t). \quad (1)$$

Bestimmung der partikulären Lösung $x_p(t)$:

(a) Ansatz $x(t) = ce^{-bt}$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = ce^{-bt}(b^2 + \omega^2) \stackrel{!}{=} ae^{-bt}$$

Es folgt

$$c = \frac{a}{b^2 + \omega^2}$$

(b) Hier liegt der Resonanzfall vor; mit dem Ansatz $x(t) = bt \sin \omega t$ erhalten wir

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2b\omega \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t + b\omega^2 \sin \omega t \stackrel{!}{=} a \cos \omega t$$

also

$$b = \frac{a}{2\omega}$$

(c) Mit dem Ansatz $x(t) = b \cos^2 \omega t$ erhalten wir $\dot{x}(t) = -2b\omega \sin \omega t \cos \omega t$ und

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2b\omega^2(-\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + b\omega^2 \cos^2 \omega t = -3b\omega^2 \cos^2 \omega t + 2b\omega^2$$

Hier stört noch der Term $2b\omega^2$, wir können aber den Ansatz leicht zu

$$x(t) = b \cos^2 \omega t + c$$

erweitern und erhalten als Lösung

$$b = -\frac{a}{3\omega^2} \quad \text{und} \quad c = -2b$$

Alternativ hätten wir das Problem auch mit Hilfe von

$$\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t \quad (2)$$

lösen können.

(d) Mit dem Ansatz $f(t) = ct^3 + dt^2 + et + f$ erhalten wir

$$\ddot{x} + \omega^2 x = c\omega^2 t^3 + d\omega^2 t^2 + (e\omega^2 + 6c)t + (f\omega^2 + 2d) = at^3 + bt^2$$

Die Koeffizienten sind also

$$c = \frac{a}{\omega^2}, \quad d = \frac{b}{\omega^2}, \quad e = -6\frac{c}{\omega^2}, \quad f = -2\frac{d}{\omega^2}. \quad (3)$$

2. Partikuläre Lösung (6 Punkte)

(a)

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \omega^2 x = \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right) \left(\frac{d}{dt} - i\omega\right) x = f(t)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x - i\omega x &= y(t) \\ \frac{d}{dt}y + i\omega y &= f(t) \end{aligned}$$

Eine Lösung der homogenen Gleichung $\dot{y} + i\omega y = 0$ ist $y = e^{-i\omega t}$. Der Ansatz $y(t) = u(t)e^{-i\omega t}$ führt auf

$$e^{-i\omega t}\dot{u} = f(t)$$

also

$$u(t) = \int^t dt' e^{i\omega t'} f(t')$$

und damit

$$y(t) = e^{-i\omega t}u(t) = \int^t dt' e^{-i\omega(t-t')} f(t')$$

Die DGL für $y(t)$ löst man dann analog

$$x(t) = e^{i\omega t}y(t) = \int^t dt' e^{i\omega(t-t')} y(t')$$

und Einsetzen liefert

$$x(t) = \int^t dt' \left(e^{i\omega(t-t')} \int^{t'} dt'' e^{-i\omega(t'-t'')} f(t'') \right)$$

(b) Für $f(t) = at$ ist

$$\begin{aligned}
 x(t) &= a \int^t dt' \left(e^{i\omega(t-t')} \int^{t'} dt'' t e^{-i\omega(t'-t'')} \right) \\
 &= a \int^t dt' e^{i\omega(t-t')} e^{-i\omega t'} \frac{1}{-\omega^2} e^{i\omega t'} (i\omega t' - 1) \\
 &= -\frac{a}{\omega^2} e^{i\omega t} \int^t dt' e^{-i\omega t'} (i\omega t' - 1) \\
 &= -\frac{a}{\omega^2} e^{i\omega t} \left(\frac{i\omega}{-\omega^2} e^{-i\omega t} (-i\omega t - 1) - \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \right) \\
 &= \frac{a}{\omega^2} t
 \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich eine Lösung von

$$\ddot{x} + \omega^2 x = at.$$

3. Theta-Funktion (6 Punkte)

(a) $u(x) = \theta(x - a) \theta(b - x)$

Wenn $x < a$ oder $x > b$ ist, ist jeweils ein Faktor Null. Dazwischen sind beide gleich 1.

(b) $u(x) = \theta(x - a) - \theta(x - b)$

Für $x < a$ sind beide Summanden Null, für $x > b$ sind beide gleich 1. Dazwischen ist nur der erste gleich 1.

(c) $u(x) = \theta\left(\frac{b-a}{2} - \left|x - \frac{b+a}{2}\right|\right)$

Die Funktion ist gleich Eins, solange der Abstand vom Mittelwert $\frac{b+a}{2}$ kleiner als die halbe Differenz $\frac{b-a}{2}$ bleibt.