Institut für Theoretische Teilchenphysik

Theoretische Physik A

WS 2000/01

Prof. Dr. J. Kühn / Dr. W. Kilian **Blatt 15** 9. 2. 2001

Abgabe: Mittwoch, 7. 2. bis 10:30

1. Darstellungen der δ-Funktion (6 Punkte)

Zeigen Sie die definierende Eigenschaft der δ-Funktion

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, \delta(t - t_0)\, f(t) \tag{1}$$

für die Funktion $f(t) = at + b$ mit Hilfe der Darstellungen

(a) $\delta_\epsilon(t) = \dfrac{1}{2\epsilon}\, \theta(t + \epsilon)\, \theta(\epsilon - t)$

(b) $\delta_\epsilon(t) = \dfrac{1}{\pi}\, \dfrac{\epsilon}{\epsilon^2 + t^2}$

wobei jeweils nach der Integration der Limes $\epsilon \to 0$ auszuführen ist. [Hinweis: Substituieren Sie im Integral $\tau = t - t_0$ und benutzen Sie, falls nötig, eine Integraltabelle.] Skizzieren Sie jeweils die Funktion $\delta_\epsilon(t)$ für zwei verschiedenene Werte von $\epsilon > 0$.

2. Fouriertransformation (5 Punkte)

Berechnen Sie $\tilde{f}(\gamma)$ in

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma\, e^{i\gamma t}\, \tilde{f}(\gamma)$$

für die Funktionen $(\lambda, t_0 > 0)$

(a) $f(t) = 0$ (1 Punkt)

(b) $f(t) = e^{-\lambda t}\theta(t)$ (1 Punkt)

(c) $f(t) = \theta(t + t_0)\, \theta(t_0 - t)$ (1 Punkt)

(d) $f(t) = 1 \quad (\equiv \lim_{\epsilon \to 0} e^{-\epsilon |t|})$ (2 Punkte)

3. Erzwungene Schwingung mit Reibung (9 Punkte)

Eine inhomogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten, z.B.

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x = f(t) \qquad \text{mit } 0 < \lambda < \omega, \tag{2}$$

läßt sich stets durch Fouriertransformation formal lösen. Dazu drückt man $x(t)$ und $f(t)$ durch ihre Fouriertransformierte aus:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma\, e^{i\gamma t}\, \tilde{x}(\gamma) \qquad \text{und} \qquad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma\, e^{i\gamma t}\, \tilde{f}(\gamma) \tag{3}$$

wobei sich $\tilde{f}(\gamma)$ aus $f(t)$ berechnen läßt:

$$\tilde{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi}\, e^{-i\gamma t}\, f(t)$$

(a) Setzen Sie die Definitionen (3) in Gl. (2) ein und bestimmen Sie so $\tilde{x}(\gamma)$. (2 Punkte)

(b) Bestimmen Sie damit eine partikuläre Lösung $x(t)$ für die Kraft

$$f(t) = q\,\theta(t + t_0)\,\theta(t_0 - t), \qquad t_0 > 0.$$

Das Fourierintegral über γ brauchen Sie nicht auszurechnen. (2 Punkte)

(c) Setzen Sie zur Vereinfachung $\tau = \omega t$, $\tau_0 = \omega t_0$, $\lambda = \omega\epsilon$ und substituieren Sie $\gamma = \omega z$. Wo in der komplexen z-Ebene sind die Pole des Integranden? (2 Punkte)

(d) Für welche Werte von t bzw. τ ist die resultierende Partikulärlösung $x(t)$ identisch gleich Null? Beschreiben Sie qualitativ den Verlauf von $x(t)$ (ohne Rechnung). (3 Punkte)

Hinweis: Versuchen Sie, den Integrationsweg entlang der reellen Achse für z durch ein Integral über einen großen Halbkreis in der unteren bzw. oberen Halbebene zu ergänzen, ohne den Wert des Integrals zu verändern. Wenn das Integral über einen geschlossenen Weg keine Pole einschließt, ist es Null.

Dies ist das letzte Übungsblatt im Wintersemester. Die zweite Klausur zur Theorie A findet am Samstag, dem 10. Februar von 9:00 bis 12:00 in den Hörsälen HMU (Anfangsbuchstabe des Nachnamens A-L) und HMO (M-Z) statt. Die Voraussetzung zur Teilnahme sind 50% der Punkte aus den Übungsblättern 9 bis 15. Für den Schein sind 50% der erreichbaren Punkte aus den beiden Klausuren notwendig, wobei die zweite Klausur doppelt zählt. Anfang des Sommersemesters wird eine Nachklausur angeboten, die in der Wertung wahlweise eine der beiden ersten Klausuren ersetzt.