

Lösungsvorschläge

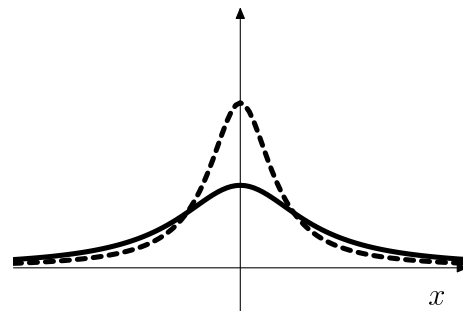
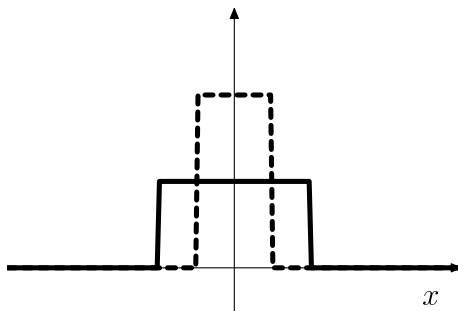
1. Darstellungen der δ -Funktion (6 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dt \theta(t - t_0 + \epsilon) \theta(\epsilon + t_0 - t) (at + b) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} d\tau (a\tau + at_0 + b) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \left[\frac{a}{2} \tau^2 + (at_0 + b)\tau \right]_{\tau=-\epsilon}^{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} 2\epsilon (at_0 + b) = at_0 + b \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\epsilon (at + b)}{\epsilon^2 + (t - t_0)^2} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{a\tau + (at_0 + b)}{\epsilon^2 + \tau^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{\pi} \left[\frac{a}{2} \ln(\epsilon^2 + \tau^2) + \frac{at_0 + b}{\epsilon} \arctan \frac{\tau}{\epsilon} \right]_{\tau=-T}^T \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{at_0 + b}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} 2 \arctan \frac{T}{\epsilon} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (at_0 + b) = at_0 + b \end{aligned}$$



2. Fouriertransformation (5 Punkte)

Die inverse Fouriertransformation ist durch

$$\tilde{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-i\gamma t} f(t)$$

gegeben:

(a)

$$\tilde{f}(\gamma) = 0$$

(b)

$$\tilde{f}(\gamma) = \int_0^\infty \frac{dt}{2\pi} e^{-(\lambda+i\gamma)t} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\lambda+i\gamma}$$

(c)

$$\tilde{f}(\gamma) = \int_{-t_0}^{t_0} \frac{dt}{2\pi} e^{-i\gamma t} = \frac{1}{-2\pi i\gamma} (e^{-i\gamma t_0} - e^{i\gamma t_0}) = \frac{\sin \gamma t_0}{\pi \gamma}$$

(d)

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\gamma) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{2\pi} e^{(\epsilon-i\gamma)t} + \int_0^\infty \frac{dt}{2\pi} e^{-(\epsilon+i\gamma)t} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\epsilon-i\gamma} + \frac{1}{\epsilon+i\gamma} \right) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + \gamma^2} \equiv \delta(\gamma) \end{aligned}$$

(vgl. Aufg. 1b). Dies ist tatsächlich die Lösung, denn

$$\int_{-\infty}^\infty d\gamma e^{i\gamma t} \tilde{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^\infty d\gamma e^{i\gamma t} \delta(\gamma) = e^0 = 1.$$

3. Erzwungene Schwingung mit Reibung (9 Punkte)

(a)

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega^2 x - f(t) \\ &= \int_{-\infty}^\infty d\gamma \left(\frac{d^2}{dt^2} e^{i\gamma t} \tilde{x}(\gamma) + 2\lambda \frac{d}{dt} e^{i\gamma t} \tilde{x}(\gamma) + \omega^2 e^{i\gamma t} \tilde{x}(\gamma) - e^{i\gamma t} \tilde{f}(\gamma) \right) \\ &= \int_{-\infty}^\infty d\gamma e^{i\gamma t} \left((-\gamma^2 + 2i\lambda\gamma + \omega^2) \tilde{x}(\gamma) - \tilde{f}(\gamma) \right) \end{aligned}$$

Die Klammer ist also die Fouriertransformierte der Null; nach Aufg. 2a ist das die Null selbst:

$$(-\gamma^2 + 2i\lambda\gamma + \omega^2) \tilde{x}(\gamma) - \tilde{f}(\gamma) = 0$$

also

$$\tilde{x}(\gamma) = \frac{\tilde{f}(\gamma)}{(\omega^2 - \gamma^2) + 2i\lambda\gamma}$$

(b) Die Fouriertransformierte von $f(t)$ wurde in Aufg. 2c ausgerechnet:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(\gamma) &= q \frac{\sin \gamma t_0}{\pi \gamma} \quad \rightarrow \quad \tilde{x}(\gamma) = q \frac{\sin \gamma t_0}{\pi \gamma (\omega^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)} \\ \rightarrow \quad x(t) &= \frac{q}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \frac{e^{i\gamma t} \sin \gamma t_0}{\gamma (\omega^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)} = \frac{q}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \frac{e^{i\gamma(t+t_0)} - e^{i\gamma(t-t_0)}}{\gamma (\omega^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}\end{aligned}$$

(c) Mit den angegebenen Ersetzungen lautet die Lösung

$$x(t) = \frac{q}{2\pi i \omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{iz(\tau+\tau_0)} - e^{iz(\tau-\tau_0)}}{z(1 - z^2 + 2i\epsilon z)}, \quad \tau = \omega t.$$

Bei $z = 0$ hat diese Funktion keinen Pol, weil $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin az}{z}$ endlich ist. Die beiden Pole liegen bei

$$z^2 - 2i\epsilon z - 1 = 0, \quad \text{also} \quad z_{1,2} = i\epsilon \pm \sqrt{1 - \epsilon^2},$$

also oberhalb der reellen Achse. (Nach Voraussetzung gilt $\epsilon < 1$.)

(d) Wenn man den Integrationsweg in der komplexen z -Ebene unterhalb der reellen Achse schließen kann, werden keine Pole eingeschlossen, und das Integral ist Null. Das geht nur, falls

$$\tau + \tau_0 < 0 \quad \text{und} \quad \tau - \tau_0 < 0,$$

also $x(t) = 0$ für $\tau < -\tau_0$ bzw. $t < -t_0$. Dann geht nämlich für $\text{Im } z \rightarrow -\infty$ der Exponentialfaktor

$$e^{iz(\tau \pm \tau_0)} \rightarrow 0,$$

so daß das Integral über einen großen Halbkreis verschwindet. Dies entspricht einer beliebigen Anfangsbedingung bei $t = -\infty$: Wegen der Dämpfung ist die Schwingung bei endlichen Zeiten in jedem Fall ausgestorben. Durch die Anregung bei $t = -t_0$ entsteht eine gedämpfte Schwingung um $x_0 = q/\omega^2$, die bei $t = t_0$ als Schwingung um $x_0 = 0$ erneut angeregt wird und dann für $t \rightarrow +\infty$ ausklingt.