

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE

Blatt 1

DR. M. GREITER

14.10.02

1. Hyperbelfunktionen

Die Hyperbelfunktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ sind in der folgenden Weise definiert:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definitionen:

- (a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- (b) $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$ und $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$
- (c) Die Umkehrfunktion $\operatorname{Arsinh} y$ (*Area-sinus-hyperbolicus*) läßt sich wie folgt berechnen:

$$\operatorname{Arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

D.h., falls $y = \sinh x$, dann ist $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Skizzieren Sie die Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$.

2. Bahnkurve

Ein Massenpunkt bewegt sich auf der Bahnkurve

$$\begin{aligned} x(t) &= r \cos \omega t, \\ y(t) &= r \sin \omega t, \end{aligned}$$

wobei r und ω konstant sind. Bestimmen Sie

- (a) die Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t) = (v_x(t), v_y(t))$,
- (b) den Betrag der Geschwindigkeit $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$,
- (c) die Beschleunigung $\mathbf{a}(t) = (a_x(t), a_y(t))$,
- (d) den Betrag der Beschleunigung $a(t) = |\mathbf{a}(t)|$.
- (e) Skizzieren Sie die Bahnkurve.

3. Integral

Zeigen Sie durch Integration, daß

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}}, \quad (1)$$

falls

$$a < 0 \quad \text{und} \quad b^2 - ac > 0. \quad (2)$$

Möglicher Lösungsweg:

(a) Finden Sie eine Substitution der Form $y = x - x_0$, so daß

$$ax^2 + 2bx + c = a(y^2 - y_0^2)$$

Hier sind die Konstanten x_0 und y_0 zu bestimmen.

(b) Das resultierende Integral läßt sich mit Hilfe der Substitution $y = y_0 \sin \phi$ berechnen. Wo gehen die Bedingungen (??) in die Rechnung ein?

Das griechische Alphabet:

A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ϵ, ε	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My

N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi
P	ρ, ϱ	Rho
Σ	σ, ς	Sigma
T	τ	Tau
Y, Υ	υ	Ypsilon
Φ	ϕ, φ	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega