

## Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE

Musterlösung

DR. M. GREITER

Blatt 3

---

## 1. Ameisenspaziergang

(a)

$$s(x) = \int_a^x dx \sqrt{1 + y'^2} = \int_a^x dx \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \int_a^x dx \cosh x = \sinh x - \sinh a$$

(b)

$$x(s) = \operatorname{Arsinh}(s + \sinh a)$$
$$y(s) = \cosh x(s) = \sqrt{1 + \sinh^2 [x(s)]} = \sqrt{1 + (s + \sinh a)^2}$$

(c)

$$\sinh' t = \cosh t \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Arsinh}' t = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Arsinh} t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$$
$$\frac{dx}{ds}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + (s + \sinh a)^2}}, \quad \frac{dy}{ds}(s) = \frac{s + \sinh a}{\sqrt{1 + (s + \sinh a)^2}}$$
$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \frac{1}{1 + (s + \sinh a)^2} + \frac{(s + \sinh a)^2}{1 + (s + \sinh a)^2} = 1$$

**Bemerkung:**

Die Ableitung der Bahnkurve  $\mathbf{r}(s)$  nach der Bogenlänge  $s$  ist ganz allgemein und immer ein Einheitsvektor in Richtung der Bahnkurventangente:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

## 2. Umlaufrolle

(a)  $F = F_1 + F_2 = (m_1 + m_2)g$

(b) Die Beschleunigung von  $m_1$ ,  $m_2$ , und dem Seil ist gegeben durch

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 g - m_2 g}{m_1 + m_2}$$

(c) Auf die Massen  $m_1$  und  $m_2$  wirkt jeweils eine Gravitationskraft  $m_1 g$  und  $m_2 g$  nach unten. Auf  $m_1$  und  $m_2$  wirken desweiteren Gegenkräfte  $m_1 a$  und  $m_2 a$ , die in die der Bewegung entgegengesetzte Richtung zeigen. Damit ergibt sich

$$F = m_1(g - a) + m_2(g + a) = (m_1 + m_2)g - (m_1 - m_2)a = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$$

## 3. Bogenlängen von Bahnkurven

(a) Die Bogenlänge ist gegeben durch das Zeitintegral über die Geschwindigkeit:

$$L(t) = \int dt |\mathbf{v}(t)| = \int dt \sqrt{\mathbf{v}(t)^2}$$

(b) Die Geschwindigkeit ist

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} c \sin \omega t + c \omega t \cos \omega t \\ c \cos \omega t - c \omega t \sin \omega t \end{pmatrix}$$

und die Bogenlänge

$$L(t) = \int dt \sqrt{\mathbf{v}(t)^2} = c \int dt \sqrt{1 + \omega^2 t^2}$$

Dies ist das Integral von Blatt 2, Aufgabe 4 mit  $a = \omega^2$ ,  $b = 0$  und  $c = 1$ . Damit ist  $ac - b^2 = \omega^2$  und

$$L(t) = \frac{c}{2\omega} \operatorname{Arsinh} \omega t + \frac{ct}{2} \sqrt{1 + \omega^2 t^2}.$$