

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE

Musterlösung

DR. M. GREITER

Blatt 4**1. Kugelmkette**(a) Impulserhaltung: $p_1 + p_2 + \dots + p_N = p_1^i$ Energieerhaltung: $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2 = (p_1^i)^2$ **$N = 2$:**

$$p_1 + p_2 = p_1^i, \quad p_1^2 + p_2^2 = (p_1^i)^2$$

Graphisch: Gerade schneidet Kreis $\rightarrow$ 2 mögliche Lösungen:

$$p_1 = p_1^i, p_2 = 0 \quad \text{oder} \quad p_1 = 0, p_2 = p_1^i$$

Da $p_1^f \leq p_2^f$ sein muss: $p_1^f = 0, p_2^f = p_1^i$ ist einzig mögliche Lösung. **$N = 3$:**

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^i, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = (p_1^i)^2$$

Graphisch: Ebene schneidet Kugel $\rightarrow$ es gibt eine "Kreis" (eine ganz Schar) von Lösungen, etwas eingeschränkt durch die geometrische Bedingung $p_1^f \leq p_2^f \leq p_3^f$.
(2 Gleichungen genügen nicht, 3 Parameter zu bestimmen.)

Unter den möglichen und geometrisch erlaubten Lösungen sind

$$p_1^f = 0, p_2^f = 0, p_3^f = p_1^i \quad (\text{im Experiment realisiert})$$

aber auch

$$p_1^f = -\frac{1}{3}p_1^i, p_2^f = \frac{2}{3}p_1^i, p_3^f = \frac{2}{3}p_1^i \quad (\text{im Experiment nie realisiert})$$

- (b) Impuls- und Energieerhaltungssatz sind nicht ausreichend, um das Experiment zu erklären.

Erklärung des Experiments:

Es handelt sich bei der Kugelmkette nicht um einen einzelnen Stoßprozess, wie oben angenommen, sondern um eine Sequenz von Zwei-Kugel-Stoßprozessen. Der Grund hierfür ist dass der Impuls eine gewisse Zeit braucht, um durch jede einzelne Kugel zu laufen. Ein einfaches Modell, das das Experiment zu beschreiben in der Lage ist, ist eine Kugelmkette von infinitesimal separierten Kugeln. In der Physik bezeichnen wir ein solches Modell als "richtig". Eine wichtige Aufgabe der theoretischen Physik ist die Konstruktion von möglichst einfachen Modellen zur qualitativ richtigen Beschreibung komplexer Sachverhalte.

2. Schiefer Wurf: Teil I

- (a) Aus $\mathbf{a}(t) \equiv (0, -g)$ erhalten wir durch Integration nach der Zeit

$$\mathbf{v}(t) = (0, -gt) + \mathbf{v}_0.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ gilt $|\mathbf{v}| = v$ und $v_y/v_x = \tan \theta$, also

$$\mathbf{v}_0 = (v \cos \theta, v \sin \theta).$$

Eine weitere Integration nach der Zeit ergibt

$$\mathbf{r}(t) = (0, -gt^2/2) + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0,$$

und aus $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ schließt man

$$\mathbf{r}(t) = (vt \cos \theta, vt \sin \theta - \frac{1}{2}gt^2). \quad (1)$$

- (b) Die Kugel trifft am Boden auf, wenn $y(t) = 0$ ist und $t \neq 0$, also

$$0 = y(T) = vT \sin \theta - \frac{1}{2}gT^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2v \sin \theta}{g}.$$

Durch Einsetzen in (1) erhalten wir

$$X = x(T) = vT \cos \theta = \frac{2v^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v^2}{g} \sin 2\theta.$$

- (c) Die maximale Höhe wird erreicht, wenn $\dot{y} = 0$ ist, d.h. $v \sin \theta = gt$ oder $t = v \sin \theta / g = T/2$. Also ist

$$Y = y(T/2) = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (2)$$

- (d) $\sin 2\theta$ ist maximal bei $2\theta = \pi/2 = 90^\circ$, also ist X maximal bei $\theta = \pi/4 = 45^\circ$.

3. Schiefer Wurf: Teil II

- (e)

$$L(t) = \int dt \sqrt{\mathbf{v}(t)^2} = \int dt \sqrt{g^2 t^2 - 2gv \sin \theta t + v^2}$$

Dies ist das Integral von Blatt 2, Aufgabe 4 mit $a = g^2$, $b = -gv \sin \theta$ und $c = v^2$.
Es gilt

$$ac - b^2 = g^2 v^2 \cos^2 \theta$$

und damit

$$L(t) = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{2g} \operatorname{Arsinh} \frac{gt - v \sin \theta}{v \cos \theta} + \frac{gt - v \sin \theta}{2g} \sqrt{g^2 t^2 - 2gv \sin \theta t + v^2}$$

Einsetzen ergibt

$$L(T) = -L(0) = \frac{v^2 \cos^2 \theta}{2g} \operatorname{Arsinh} \tan \theta + \frac{v^2}{2g} \sin \theta$$

und damit

$$L = L(T) - L(0) = \frac{v^2}{g} (\cos^2 \theta \operatorname{Arsinh} \tan \theta + \sin \theta)$$

(f) Für kleine Winkel gilt

$$L \approx \frac{v^2}{g}(\theta + \theta) \approx X,$$

dagegen für $\theta = \pi/2$:

$$L = \frac{v^2}{g}(0 + 1) = 2Y.$$

Für den Term mit dem Arsinh gilt nämlich in der Nähe von $\theta = \pi/2$:

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta \operatorname{Arsinh} \tan \theta &= \cos^2 \theta \ln(\tan \theta + \sqrt{1 + \tan^2 \theta}) &= \cos^2 \theta \ln \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta} \\ &\rightarrow -\cos^2 \theta \ln \cos \theta \end{aligned}$$

Setze $\phi = \pi/2 - \theta$ und verwende L'Hôpital für $\phi \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \dots &= -\sin^2 \phi \ln \sin \phi \\ &\rightarrow -\phi^2 \ln \phi = -\frac{\ln \phi}{1/\phi^2} \rightarrow -\frac{1/\phi}{-2/\phi^3} = 2\phi^2 \rightarrow 0. \end{aligned}$$