

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE

Musterlösung

DR. M. GREITER

Blatt 5

1. Komplexe Zahlen

(a) (i) $5i$ (ii) $2 + i$

(b) $x = 2 \pm i$

(c) $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

(d) $\cos(ix) = \cosh x, \sin(ix) = i \sinh x$

(e)

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i \sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = \\ &= (\cos x + i \sin x) (\cos y + i \sin y) = \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)\end{aligned}$$

Der Realteil dieser Gleichung ergibt (i), der Imaginärteil (ii).

(f) i ist **nicht** als $\sqrt{-1}$ definiert.

2. Fadenpendel mit Reibung

(a) Kräftegleichgewicht

$$ml\ddot{\varphi} + m\gamma l\dot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0$$

ergibt Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen ($\sin \varphi \approx \varphi$):

$$\ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (1)$$

Ansatz

$$\varphi = \varphi_0 e^{\lambda t} \quad \text{liefert} \quad \lambda^2 + \gamma \lambda + \frac{g}{l} = 0.$$

Da das Pendel Schwingungen ausführt, muss λ komplex sein:

$$\lambda_{12} = -\frac{\gamma}{2} \pm i \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad \text{und} \quad \frac{g}{l} > \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

Also

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{i\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (2)$$

(b) Nach N Vollschrwingungen nimmt φ_0 auf φ_N ab:

$$\frac{\varphi_N}{\varphi_0} = e^{-\frac{\gamma}{2}NT} \quad \text{wobei} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{Schwingungsdauer.}$$

mit ω aus (??):

$$\frac{\gamma}{2}N \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}} = -\ln\left(\frac{\varphi_N}{\varphi_0}\right) \quad \text{wobei} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Aufgelöst ergibt sich

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{\left(\frac{2\pi N}{-\ln\left(\frac{\varphi_N}{\varphi_0}\right)}\right)^2 + 1} \quad \text{und} \quad \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + \left(\frac{-\ln\left(\frac{\varphi_N}{\varphi_0}\right)}{2\pi N}\right)^2}$$

(c) Mit $\frac{\varphi_N}{\varphi_0} = \frac{1}{2}$ für $N = 100$:

$$\frac{-\ln\left(\frac{\varphi_N}{\varphi_0}\right)}{2\pi N} \approx 0.0011 \ll 1$$

Relativer Fehler in ω ohne Dämpfung:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega} - 1 = \sqrt{1 + \left(\frac{-\ln\left(\frac{\varphi_N}{\varphi_0}\right)}{2\pi N}\right)^2} - 1$$

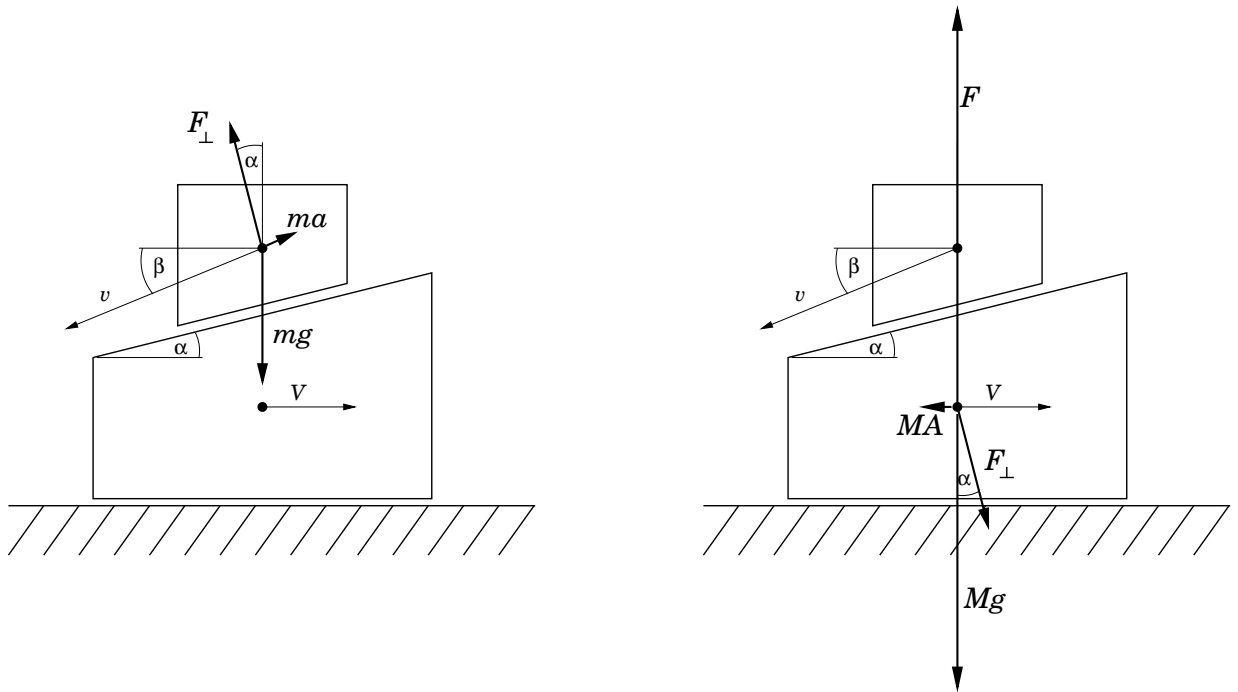
Mit $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ für kleine x :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{-\ln\left(\frac{\varphi_N}{\varphi_0}\right)}{2\pi N}\right)^2 - 1 \approx 6 \cdot 10^{-7}$$

Der Fehler ist vernachlässigbar!

3. Zwei Massen: Teil I

- (a) Die Masse M rutscht unter der Masse m weg und erlaubt ihr somit, sich mit einem Winkel $\beta > \alpha$ nach links unten zu bewegen.
- (b) Kräftegleichgewichte für m und M :



Kräftegleichgewicht für m :

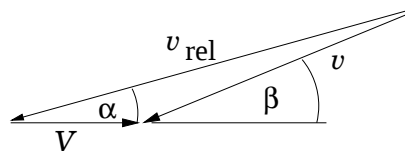
$$mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + F_{\perp} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + ma \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

Kräftegleichgewicht für M :

$$Mg \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + F_{\perp} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} + MA \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ 4 Gleichungen für 5 Unbekannte: $F_{\perp}, a, A, \beta, F$.

- (c) Die Relativgeschwindigkeit muß in Richtung der geneigten Oberfläche der Masse M zeigen:



$$v \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ -\sin \beta \end{pmatrix} - V \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_{\text{rel}} \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

Eliminiere v_{rel} durch Quotientenbildung:

$$\frac{v \cos \beta + V}{v \sin \beta} = \cot \alpha \quad (3)$$

4. Zwei Massen: Teil II

(d) Multipliziere (??) mit $v \sin \beta$, schreibe $v = at$, $V = At$ und dividiere durch t :

$$a \cos \beta + A = \cot \alpha \cdot a \sin \beta \quad (4)$$

(e) Addition der x -Komponenten der Gleichungen (??) und (??):

$$-F_{\perp} \sin \alpha + ma \cos \beta = 0 \quad (5)$$

$$F_{\perp} \sin \alpha - MA = 0 \quad (6)$$

ergibt

$$MA = ma \cos \beta. \quad (7)$$

Nach A aufgelöst und in (??) eingesetzt:

$$a \cos \beta + \frac{m}{M} a \cos \beta = \cot \alpha \cdot a \sin \beta$$

oder

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan \alpha = \tan \beta \quad (8)$$

(f) Setze (??) in die y -Komponente von (??):

$$-mg + \frac{ma \cos \beta}{\sin \alpha} \cos \alpha + ma \sin \beta = 0$$

und löse nach a auf:

$$a = \frac{g}{\cos \beta \cot \alpha + \sin \beta} = \frac{1}{\cos \beta} \frac{g}{\cot \alpha + \tan \beta} \quad (9)$$

Für A ergibt sich mit (??), (??) und (??)

$$A = \frac{m}{M} a \cos \beta = \frac{m}{M} \frac{g}{\cot \alpha + \tan \beta} = \frac{m}{M} \frac{g}{\cot \alpha + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan \alpha} \quad (10)$$

Mit (??) ergibt sich

$$F_{\perp} = \frac{MA}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\cos \alpha + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \sin \alpha \tan \alpha} \quad (11)$$

Die gesuchte Kraft F auf die waagrechte Ebene ergibt sich damit aus der y -Komponente von (??) zu

$$F = Mg + F_{\perp} \cos \alpha = Mg + \frac{mg}{1 + \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan^2 \alpha} = \frac{M + m}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha} g \quad (12)$$