Universität Karlsruhe | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

Prof. P. Wölfle
Dr. M. Greiter

Blatt 6
25.11.02

---

1. Erzwungene Schwingungen

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) \tag{1}$$

für die folgenden Funktionen $f(t)$ an:

(a) $f(t) = 0$

(b) $f(t) = ae^{-bt}$

(c) $f(t) = a\cos(\omega t)$

(d) $f(t) = a\cos^2(\omega t)$

(e) $f(t) = at^3 + bt^2$

Hierbei gilt $a, b, \omega \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Die allgemeine Lösung einer inhomogenen ($f(t) \neq 0$) linearen Differentialgleichung ist durch die Summe der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung ($f(t) = 0$) und einer partikulären Lösung gegeben. Verwenden Sie in den Teilaufgaben (b)–(e) jeweils einen „Ansatz vom Typ der rechten Seite“, um eine partikuläre Lösung zu bestimmen.

2. Partikuläre Lösung

Es gilt, eine allgemeine Formel zur Berechnung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung (**??**) herzuleiten.

(a) Schreiben Sie

$$\frac{d^2}{dt^2}x + \omega^2 x = \left(\frac{d}{dt} + i\omega\right)\left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)x$$

und setzen Sie

$$y(t) = \left(\frac{d}{dt} - i\omega\right)x(t).$$

Sie erhalten eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung für $y(t)$. Lösen Sie diese Differentialgleichung durch Variation der Konstanten, d.h. durch einen Ansatz der Form

$$y(t) = u(t)\, e^{-i\omega t}.$$

(b) Lösen sie die verbleibende Differentialgleichung erster Ordnung für $x(t)$ mit einem analogen Ansatz. Sie erhalten die gewünschte Formel durch Einsetzen des Ergebnisses von (a) in das Ergebnis von (b).

Hinweis: Das Ergebnis lautet

$$x(t) = \int^{t} dt'\, e^{i\omega(t-t')} \int^{t'} dt''\, e^{-i\omega(t'-t'')} f(t''). \tag{2}$$

(c) Verifizieren Sie die Lösungsformel (**??**) für $f(t) = at$.

Hinweis:

$$\int dt\, te^{\lambda t} = \frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda t}(\lambda t - 1)$$

3. Theta-Funktion

Für $x \neq 0$ ist die θ-Funktion definiert durch

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Benutzen Sie die θ-Funktion, um die Funktion

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x > a \text{ und } x < b \\ 0 & \text{falls } x < a \text{ oder } x > b \end{cases}$$

mit $a < b$ für $x \neq a$ und $x \neq b$

(a) als Produkt zweier θ-Funktionen

(b) als Differenz zweier θ-Funktionen

(c) durch eine einzige θ-Funktion (und die Betragsfunktion)

darzustellen.