

**Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03**

PROF. P. WÖLFLE

**Musterlösung**

DR. M. GREITER

**Blatt 7****1. Fadenpendel in Polarkoordinaten: Teil I**

(a) Einheitsvektoren in kartesischer Darstellung:

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\phi} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\phi \quad \frac{d}{d\phi} \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_r$$

(b) Bilden der Ableitungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= l \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= l \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= l \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - l \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

(c) Kräftegleichgewicht:

$$-m \ddot{\mathbf{r}} + mg (\cos \phi \mathbf{e}_r - \sin \phi \mathbf{e}_\phi) = F_{\text{Faden}} \mathbf{e}_r \quad (1)$$

 $\mathbf{e}_\phi$  Komponente der Bewegungsgleichung:

$$-ml \ddot{\phi} - mg \sin \phi = 0$$

oder

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (2)$$

(d) Multiplikation von (??) mit  $\dot{\phi}$  (integrierender Faktor):

$$\dot{\phi} \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \dot{\phi} \sin \phi = 0$$

oder

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{g}{l} \cos \phi \right) = 0$$

Integration ergibt:

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{g}{l} \cos \phi = \text{const.} \quad (3)$$

aufgelöst:

$$\dot{\phi}^2(\phi) = \frac{2g}{l} (\cos \phi - \cos \phi_{\text{max}}) \quad (4)$$

wobei die Konstante durch  $\dot{\phi}(\phi_{\text{max}}) = 0$  bestimmt wurde.Wir erhalten den Energiesatz durch Multiplikation von (??) mit  $ml^2$ :

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\phi}^2 + mgl(1 - \cos \phi) = mgl(1 - \cos \phi_{\text{max}}) = E_{\text{tot}}$$

## 2. Fadenpendel in Polarkoordinaten: Teil II

(e) Fadenspannung:  $e_r$  Komponente der Bewegungsgleichung:

$$F_{\text{Faden}} = ml\dot{\phi}^2 + mg \cos \phi$$

mit (??):

$$F_{\text{Faden}} = mg(3 \cos \phi - 2 \cos \phi_{\max})$$

(f) kleine Ausschläge:  $\cos \phi \approx 1 - \frac{1}{2}\phi^2$ . Aus (??):

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{l}(\phi_{\max}^2 - \phi^2)}$$

Separation der Variablen:

$$\frac{d\phi}{\sqrt{(\phi_{\max}^2 - \phi^2)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt$$

oder integriert:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{(\phi_{\max}^2 - \phi^2)}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \int dt$$

Das Integral ist ein Spezialfall von Blatt 1, Aufgabe 3, mit  $a = -1$ ,  $b = 0$ ,  $c = \phi_{\max}^2$ :

$$\arcsin\left(\frac{\phi}{\phi_{\max}}\right) = \sqrt{\frac{g}{l}} t + \text{const.}$$

Mit Anfangsbedingung  $\phi(t=0) = 0$  mit  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ :

$$\phi = \phi_{\max} \sin \omega t$$

## 3. Gedämpfter harmonischer Oszillator mit Antrieb

Ansatz  $x = X_0 e^{i\omega t}$  für

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A e^{i\omega t} \quad (1)$$

ergibt

$$(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)X_0 = A$$

oder

$$X_0 = \frac{A}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \equiv x_0 e^{i\alpha}$$

Somit ergibt sich auch für die reelle Lösung der reellen Gleichung:

$$x_0 = |X_0| = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}, \quad \tan \alpha = -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Begründung: Aus obiger Rechnung folgt, dass  $x = \bar{X}_0 e^{-i\omega t}$  Lösung zu

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A e^{-i\omega t} \quad (2)$$

ist, wobei  $A$  reell ist. Subtraktion (??) – (??) und Multiplikation der Differenz mit  $\frac{1}{2i}$  ergibt, dass

$$x = \frac{1}{2i} (X_0 e^{i\omega t} - \bar{X}_0 e^{-i\omega t}) = \frac{1}{2i} (x_0 e^{i\omega t + i\alpha} - x_0 e^{-i\omega t - i\alpha}) = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

eine partikuläre Lösung von

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = A \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = A \sin \omega t$$

ist.

#### 4. Greensche Funktion des ungedämpften Oszillators

(a) Durch Umformen:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t dt' e^{i\omega(t-t')} \int_{-\infty}^{t'} dt'' e^{-i\omega(t'-t'')} f(t'') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \theta(t-t') e^{i\omega(t-t')} \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \theta(t'-t'') e^{-i\omega(t'-t'')} f(t'') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \theta(t-t') e^{i\omega(t-t')} \theta(t'-t'') e^{-i\omega(t'-t'')} f(t'')}_{G(t-t'')} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} G(t-t'') &= \theta(t-t'') \int_{t''}^t dt' e^{i\omega(t-t')} e^{-i\omega(t'-t'')} \\ &= \theta(t-t'') e^{i\omega(t+t'')} \int_{t''}^t dt' e^{-i\omega 2t'} \\ &= \theta(t-t'') \left( -\frac{1}{2i\omega} e^{i\omega(t+t'')} \right) (e^{-2i\omega t} - e^{-2i\omega t''}) \\ &= \theta(t-t'') \frac{1}{2i\omega} (e^{i\omega(t-t'')} - e^{-i\omega(t-t'')}) \\ &= \theta(t-t'') \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t'') \end{aligned} \tag{1}$$

(b) Für  $t < 0$  sowie  $t > 0$  stellt (??) trivialerweise eine Lösung der dann homogenen Differentialgleichung dar. Im Grenzfall  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dt \left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) G(t) &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dt \frac{d^2}{dt^2} G(t) = \frac{d}{dt} G(t) \Big|_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \\ &= \left( \delta(t) \frac{\sin \omega t}{\omega} + \theta(t) \cos \omega t \right) \Big|_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} = 1 = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dt \delta(t) \end{aligned}$$