

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE

Musterlösung

DR. M. GREITER

Blatt 9**1. Greensche Funktion: Teil I**

Allgemein:

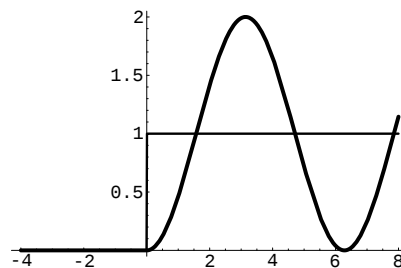
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t-t') f(t') \quad (1)$$

Ungedämpfter harmonischer Oszillator:

$$G(t-t') = \theta(t-t') \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t') \quad (2)$$

(a) $f(t) = \omega^2 \theta(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \omega^2 \theta(t-t') \frac{1}{\omega} \sin \omega(t-t') \theta(t') = \theta(t) \int_0^t dt' \omega \sin \omega(t-t') \\ &= \theta(t) \cos \omega(t-t') \Big|_0^t = \theta(t) (1 - \cos \omega t) \end{aligned} \quad (3)$$

(b) $f(t) = \frac{\omega^2}{\tau} \left(\theta(t + \frac{\tau}{2}) - \theta(t - \frac{\tau}{2}) \right)$:

Aus der Linearität der Differentialgleichung und (??) folgt

$$x(t) = \frac{1}{\tau} \left[\theta(t + \frac{\tau}{2}) \left(1 - \cos \omega(t + \frac{\tau}{2}) \right) - \theta(t - \frac{\tau}{2}) \left(1 - \cos \omega(t - \frac{\tau}{2}) \right) \right]$$

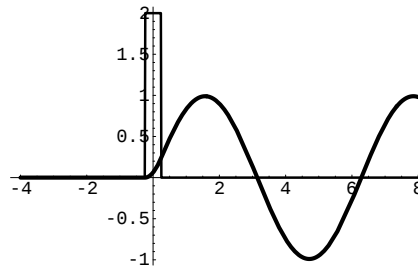
Für $t > \frac{\tau}{2}$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\tau} \left(-\cos \omega(t + \frac{\tau}{2}) + \cos \omega(t - \frac{\tau}{2}) \right) = \frac{1}{\tau} \operatorname{Re} \left[-e^{i\omega(t+\frac{\tau}{2})} + e^{i\omega(t-\frac{\tau}{2})} \right] \\ &= \frac{1}{\tau} \operatorname{Re} \left[e^{i\omega t} \underbrace{(-e^{i\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-i\omega\frac{\tau}{2}})}_{-2i \sin \omega\frac{\tau}{2}} \right] = \frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \sin \omega t \end{aligned}$$

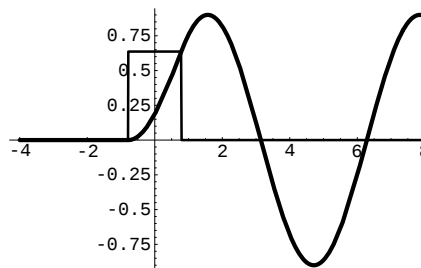
2. Greensche Funktion: Teil II

(c) Skizzen (mit $\omega = 1$) und Diskussion:

(i) $\tau \rightarrow 0^+$: $\frac{2}{\tau} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \rightarrow \omega$: $x(t) \rightarrow \theta(t) \omega \sin \omega t = \omega^2 G(t)$

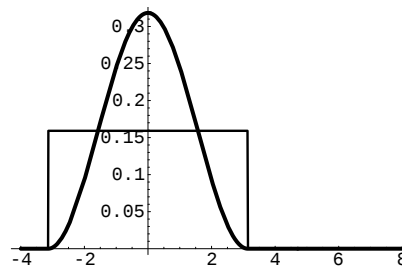


(ii) $\tau = \frac{T}{4}$: $\sin\left(\frac{\omega T}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$:



Die Amplitude der Schwingung für $t > \frac{\tau}{2}$ hängt von τ ab, die Phase der Schwingung aber nicht.

(iii) $\tau = T$: $\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) = 0$:



Die Störung hält genau eine Vollschrwingung an. Sie wird in einem Moment ausgeschaltet, in dem der Oszillator sich in seinem Ausgangszustand befindet. Für $t > \frac{\tau}{2}$ ist deshalb $x(t) = 0$.

- (d) Die Störung lässt sich realisieren, in dem man ein Fadenpendel so auf einer drehbaren Kreisscheibe montiert, dass sich die Pendelmasse in der Ruhestellung am Anfang genau im Mittelpunkt der Scheibe befindet. (Die Drehachse geht durch die Pendelmasse.) Die Störung $f(t)$ wird nun durch Drehen der Kreisscheibe mit einem Winkel $\propto f(t)$, $\ll 1$ bewirkt. Im Fall (iii) durchläuft das Pendel genau eine Vollschrwingung. Sobald sich die Pendelmasse wieder an Ihrem Ausgangspunkt befindet, und dort für einen Moment die Geschwindigkeit $\dot{x} = 0$ besitzt, wird die Kreisscheibe wieder in die Ausgangsposition zurückgedreht. Folglich ruht das Pendel von diesem Moment an wieder.

3. ε -Tensor

(a) Aus

$$(\mathbf{b} \times \mathbf{c})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} b_j c_k$$

folgt:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^3 a_i (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

(b) Aus

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$$

folgt:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

(c) Aus

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$$

folgt:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -\mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b})$$

(d) Die Identität

$$\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad (1)$$

gilt für alle möglichen Werte von j, k, l, m . Für $j = k$ oder $l = m$ sind beide Seiten gleich 0. Für $j \neq k$ ist das erste ε -Symbol auf der linken Seite (und somit die linke Seite) nur dann von 0 verschieden, wenn i den verbliebenen und somit von j und k verschiedenen Wert annimmt. l und m müssen auch verschieden sein, und ebenfalls von i verschieden sein. Damit verbleiben als Möglichkeiten nur $l = j, m = k$ oder $l = k, m = j$. Für $l = j, m = k$ sind die Vorzeichen beider ε -Symbole auf der linken Seite gleich, und mit $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 1$ positiv. Für $l = k, m = j$ sind die Vorzeichen beider ε -Symbole auf der linken Seite ungleich, und mit $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ikj} = -1$ negativ.

(e) Mit (??) folgt:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijm} = \sum_{j=1}^3 (\delta_{jj} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kj}) = 3\delta_{km} - \delta_{km} = 2\delta_{km}$$

(f)

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j \left(\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{klm} b_l c_m \right) \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{jl} \delta_{im}) a_j b_l c_m \\ &= b_i \left(\sum_{j=1}^3 a_j c_j \right) - c_i \left(\sum_{j=1}^3 a_j b_j \right) = (\mathbf{b} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))_i \end{aligned}$$

(g) Optional, nur für Interessierte:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k \right) \left(\sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \varepsilon_{ilm} c_l d_m \right) \\
&= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \\
&= \left(\sum_{j=1}^3 a_j c_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 b_k d_k \right) - \left(\sum_{j=1}^3 a_j d_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 b_k c_k \right) \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Es ist üblich, eine implizite Summation über wiederholte Indizes anzunehmen. Dies hat den Vorteil, dass man sich die ganzen Summenzeichen sparen kann. Mit dieser Konvention lässt sich z.B. die Lösung zu Aufgabenteil (f) schreiben als:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i &= \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{jl} \delta_{im}) a_j b_l c_m \\
&= b_i (a_j c_j) - c_i (a_j b_j) = (\mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}))_i
\end{aligned}$$

2. Die Identität (g) lässt sich auch aus der zyklischen Vertauschbarkeit des Spatproduktes (b) und Identität (f) ableiten:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{d} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) \\
&= \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})) \\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})
\end{aligned}$$