

## Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE

Musterlösung

DR. M. GREITER

Blatt 11

## 1. Energieerhaltung

- (a) Reibungskraft: Die Kraft hängt von  $\dot{\mathbf{r}}$  ab. Die Energie ist nicht erhalten, und die Kraft läßt sich nicht aus einem Potential ableiten.
- (b) Zentralkraft: Das Potential ist  $U(\mathbf{r}) = \frac{k}{2}\mathbf{r}^2$ , die Energie ist erhalten.
- (c) Lorentzkraft: Hier steht  $\mathbf{F}$  stets senkrecht auf  $\dot{\mathbf{r}}$ . Es gibt kein Potential, die Energie ist aber trotzdem erhalten, weil keine Arbeit geleistet wird.
- (d) Hier gibt es ein Potential  $U(\mathbf{r}, t) = -t\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}$ , dies ist aber zeitabhängig. Die Energie ist daher nicht erhalten.

Das Potential, falls es existiert, ist außerdem in allen Fällen nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

## 2. Zweiteilchenproblem und Drehimpuls

(a)

$$\mathbf{F}_{21} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1(t) = \begin{pmatrix} mc \\ 0 \\ -mc \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbf{R}(t) = \frac{m_1 \mathbf{r}_1(t) + m_2 \mathbf{r}_2(t)}{m_1 + m_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}bt \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3mb \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_2(t) - \mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} -ct^2 \\ bt \\ ct^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}(t) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} -mct \\ \frac{1}{2}mb \\ mct \end{pmatrix}$$

(d)

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}mbct^2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}mbct^2 \end{pmatrix} = \frac{mbct^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (e) Die Richtung von  $\mathbf{L}(t)$  ist konstant, also verläuft die Bewegung in einer Ebene.
- (f) Der Betrag von  $\mathbf{L}(t)$  ist nicht konstant, also gilt der Flächensatz hier nicht.

### 3. Schwingungen eines Turms

- (a) Bewegungsgleichung der Pendelmasse:

Für die Rückstellkraft bzw. Reibungskraft ist die relative Auslenkung bzw. relative Geschwindigkeit des Pendels zum Turm maßgebend; für die Trägheitskraft hingegen ist die absolute Beschleunigung der Pendelmasse maßgebend:

$$\ddot{x} + \gamma(\dot{x} - \dot{\xi}) + \omega_0^2(x - \xi) = 0$$

wobei  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$  (siehe Blatt 5 Aufgabe 2).

- (b) Mit der komplexen (siehe Blatt 7 Aufgabe 3) Turmschwingung  $\xi(t) = \xi_0 e^{i\omega t}$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \xi_0 \underbrace{(i\gamma\omega + \omega_0^2)}_a e^{i\omega t}$$

Ansatz  $x(t) = X_0 e^{i\omega t}$  führt zu:

$$X_0 \underbrace{(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)}_b e^{i\omega t} = \xi_0 a e^{i\omega t}$$

oder

$$X_0 = \xi_0 \frac{a}{b}$$

- (c) Auslenkung des Pendels relativ zum Turm:

$$y(t) = x(t) - \xi(t) = (X_0 - \xi_0) e^{i\omega t}$$

und damit

$$Y_0 = X_0 - \xi_0 = \left(\frac{a}{b} - 1\right) \xi_0 = \frac{\omega^2}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \xi_0 \quad (1)$$

- (d) Mit  $\omega = \frac{2\pi}{2s}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ,  $\gamma = 0.02 \frac{1}{s}$ ,  $y_0 = 0.05 \text{ m}$ :

$$\xi_0 = y_0 \left| \frac{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}{\omega^2} \right| = y_0 \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}}{\omega^2} = 4.39 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Eine ganz geringe Turmschwingung von ca. 0.4 mm führt bereits zu einem Pendelausschlag von 5 cm.

- (e) Aus (??) folgt: Die Auslenkung des Pendels  $y_0$  relativ zum Turm wird maximal wenn  $\omega_0 = \omega$ , d.h. wenn das Pendel in Resonanz mit dem Turm schwingt. Die Länge des Pendels ist dann also

$$l = \frac{g}{\omega^2}.$$

Das Verhältnis der Ausschläge ergibt sich aus (??) zu

$$\frac{y_0}{\xi_0} = \frac{\omega}{\gamma},$$

und ist folglich nur wegen der endlichen Dämpfung  $\gamma$  endlich. Würden wir die Dämpfung vernachlässigen, d.h.  $\gamma = 0$  setzen, wäre das Verhältnis der Ausschläge unendlich und somit unser Fehler auch unendlich (vgl. Blatt 5, Aufgabe 2c).