

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03

PROF. P. WÖLFLE

Musterlösung

DR. M. GREITER

Blatt 12**1. Molekülschwingung**

(a) Bewegungsgleichungen:

$$-m_1 \ddot{x}_1 + k(x_2 - x_1 - a) = 0$$

$$-m_2 \ddot{x}_2 - k(x_2 - x_1 - a) = 0$$

(b) Schwerpunktskoordinate:

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Relativkoordinate:

$$x = x_2 - x_1$$

Umgeformt:

$$x_1 = X - \frac{m_2}{m_1 + m_2} x, \quad x_2 = X + \frac{m_1}{m_1 + m_2} x$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichungen:

$$-m_1 \ddot{X} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{x} + k(x - a) = 0 \quad (1)$$

$$-m_2 \ddot{X} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{x} - k(x - a) = 0 \quad (2)$$

Addition (??)+(??) ergibt:

$$(m_1 + m_2) \ddot{X} = 0 \quad \text{also} \quad \ddot{X} = 0.$$

Eingesetzt in (??):

$$m^* \ddot{x} + k(x - a) = 0 \quad \text{wobei} \quad m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Harmonischer Oszillator mit Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m^*}}$$

2. Lenzscher Vektor: Teil I

(a) Polarkoordinaten (siehe Blatt 7, Aufgabe 1): Mit

$$\frac{d}{d\phi} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\phi \quad \frac{d}{d\phi} \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_r$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \\ \ddot{\mathbf{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi.\end{aligned}$$

Eingesetzt in

$$m \ddot{\mathbf{r}} = F(r) \mathbf{e}_r$$

ergibt sich

$$m(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) = F(r) \quad 2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi} = 0 \quad (1)$$

Mit $\dot{r} \equiv 0$ folgt $\ddot{\phi} = 0$ oder $\dot{\phi} = \omega = \text{const.}$ Somit $F(r) = -mr\omega^2$.

(b) Lenzscher Vektor:

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv -\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{r^2 F(r)} - \mathbf{e}_r \quad (2)$$

Drehimpuls:

$$\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = m(r \mathbf{e}_r \times r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi) = mr^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_z$$

Für $\dot{r} \equiv 0$ ist

$$\dot{\mathbf{r}} = r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi, \quad \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = mr^3 \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r$$

und (??) reduziert sich zu

$$-mr \dot{\phi}^2 = F(r).$$

Eingesetzt in (??) ergibt sich $\boldsymbol{\epsilon} = 0$.

3. Lenzscher Vektor: Teil II

(c) Es gilt

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\mathbf{L} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L})}{r^2 F(r)} - m(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = 0,$$

da beide Spatprodukte zwei identische Vektoren enthalten und daher verschwinden.
 $\boldsymbol{\epsilon}$ steht also senkrecht auf $\mathbf{L}$ und liegt damit in der Bahnebene.

(d) r minimal oder maximal $\Rightarrow \dot{r} = 0$. Somit

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{mr \dot{\phi}^2}{F(r)} \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_r$$

(e) Mit $r^2 F(r) = f(r)$:

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}}{f(r)} - \mathbf{e}_r$$

Abgeleitet

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{f(r)} \right) (-\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) - \frac{\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{L}}}{f(r)} - \dot{\mathbf{e}}_r$$

Mit

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{f(r)}{mr^2} \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{L} = mr^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_z, \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{L}} = 0,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \left(-\frac{f'(r) \dot{r}}{f(r)^2} \right) (-\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) - \frac{1}{f(r)} \left(\frac{f(r)}{mr^2} \mathbf{e}_r \times mr^2 \dot{\phi} \mathbf{e}_z \right) - \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \\ &= \frac{f'(r) \dot{r}}{f(r)^2} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} \end{aligned}$$

Da $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}$ im allgemeinen ungleich Null ist (sofern der Massepunkt nicht in Ruhe bleibt), muss entweder $\dot{r} = 0$ (Kreisbahn) oder $f'(r) = 0$ (und somit $F(r) \propto \frac{1}{r^2}$) sein.