

Übungen zur Theoretischen Physik A WS 02/03PROF. P. WÖLFLE
DR. M. GREITER**Musterlösung
Blatt 13****1. Fluchtbahnen**

Mit

$$x = r \cos \phi \quad \text{und} \quad y = r \sin \phi$$

lässt sich

$$r(\phi) = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}$$

umformen in

$$r + \epsilon x = p.$$

Mit $r^2 = x^2 + y^2$ folgt

$$x^2 + y^2 = (p - \epsilon x)^2 = p^2 - 2p\epsilon x + \epsilon^2 x^2,$$

oder mit quadratischer Ergänzung

$$(\epsilon^2 - 1) \left(x - \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1} \right)^2 - y^2 = \frac{p^2}{\epsilon^2 - 1}.$$

Für $\epsilon > 1$ lässt sich dies umformen auf

$$\frac{\left(x - \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1} \right)^2}{\left(\frac{p}{\epsilon^2 - 1} \right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \right)^2} = 1,$$

also

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

mit

$$x_0 = \frac{\epsilon p}{\epsilon^2 - 1}, \quad a = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}.$$

Für $\epsilon \gg 1$ lautet die Bahnkurve näherungsweise

$$r(\phi) = \frac{p}{\epsilon \cos \phi}$$

Wegen $x = r \cos \phi$ bedeutet das

$$x = \frac{p}{\epsilon} = \text{const.}$$

Die Bahnkurve ist also eine Gerade parallel zur y -Achse.

2. Komet

(a) Für eine Parabel ist die Exzentrizität $\epsilon = 1$, also die Gesamtenergie

$$E = -\frac{k}{2p}(1 - \epsilon^2) = 0$$

Das bedeutet

$$0 = \frac{\mu}{2}v_0^2 - \frac{k}{r_0}$$

also

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{\mu r_0}}.$$

(b) Für eine Kreisbahn ist $\epsilon = 0$ und $p = r_0$, also

$$E = -\frac{k}{2r_0},$$

also

$$-\frac{k}{2r_0} = \frac{\mu}{2}v_E^2 - \frac{k}{r_0}$$

d.h.

$$v_E = \sqrt{\frac{k}{\mu r_0}}.$$

Bemerkung: Da

$$k = Gm_1m_2 = G\mu M \quad \text{wobei} \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}, \quad M = m_1 + m_2$$

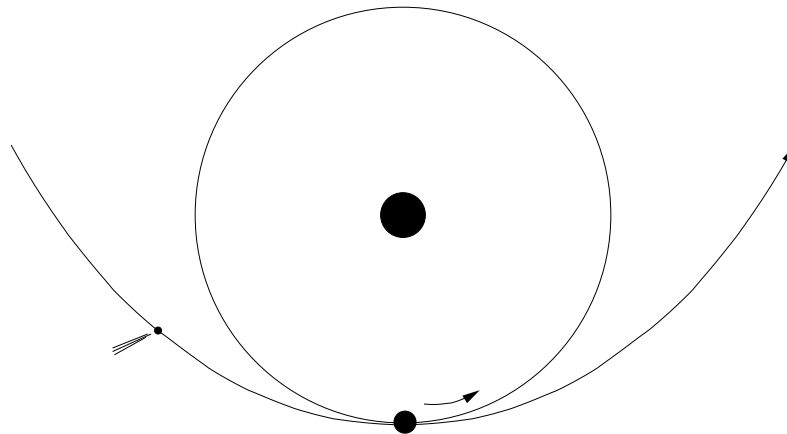
geht nur die Gesamtmasse M , nicht aber die reduzierte Masse μ in die Formeln für die Geschwindigkeit auf den verschiedenen Bahnen ein. Die Gesamtmasse M ist in guter Näherung durch die Sonnenmasse gegeben und somit unabhängig von der Masse des Kometen oder Planeten auf der Bahn.

- (c) Unabhängig von der Lage der Bahn des Kometen gilt bei $r = r_0$ die Relation $v_0/v_E = \sqrt{2}$. Die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn ist

$$v_E = \frac{2\pi r_0}{T} = \frac{2\pi \times 150 \times 10^6 \text{ km}}{\pi \times 10^7 \text{ s}} = 30 \text{ km/s}.$$

Die minimale Relativgeschwindigkeit wird erreicht, wenn die Richtungen beider Geschwindigkeiten gleich sind. (Dann befindet sich der Komet im Perihel seiner Bahn.) Es gilt daher

$$v_{\min} = (\sqrt{2} - 1)v_E = 12.4 \text{ km/s}.$$



Bemerkung:

Würden wir das Gravitationsfeld der Erde berücksichtigen, wäre die Geschwindigkeit des Kometen gegeben durch

$$v_{\text{Komet}} = \sqrt{v_0^2 + v_{\text{Flucht}}^2}$$

wobei

$$v_{\text{Flucht}} = \sqrt{2Rg} = 11.2 \text{ km/s}$$

mit Erdradius $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ und $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ die Fluchtgeschwindigkeit der Erde ist. Es ergibt sich $v_{\text{Komet}} = 43.9 \text{ km/s}$ und somit $v_{\min} = 13.9 \text{ km/s}$.

3. Planetenbewegung

Lenzscher Vektor für $F(r) = -k/r^2$, ausgedrückt durch $r(t)$ und $\phi(t)$:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{k} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - \frac{1}{r} \mathbf{r} \\ &= \frac{\mu}{k} \begin{pmatrix} \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2 \dot{\phi} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu}{k} \begin{pmatrix} r^2 \dot{\phi} \sin \phi + r^3 \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ -r^2 \dot{\phi} \cos \phi + r^3 \dot{\phi}^2 \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dies ist konstant gleich $(\epsilon, 0, 0)$. Zusammen mit der Drehimpulserhaltung ergibt das die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}L &= \mu r^2 \dot{\phi} \\ \epsilon &= \frac{\mu}{k} r^2 \dot{\phi} \sin \phi + \left(\frac{\mu}{k} r^3 \dot{\phi}^2 - 1 \right) \cos \phi \\ 0 &= -\frac{\mu}{k} r^2 \dot{\phi} \cos \phi + \left(\frac{\mu}{k} r^3 \dot{\phi}^2 - 1 \right) \sin \phi\end{aligned}$$

Einsetzen der ersten in die beiden anderen Gleichungen liefert mit $p = \frac{L^2}{\mu k}$:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{L}{k} \dot{r} \sin \phi + \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \cos \phi \\ 0 &= -\frac{L}{k} \dot{r} \cos \phi + \left(\frac{p}{r} - 1 \right) \sin \phi\end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $\cos \phi$ und die zweite mit $\sin \phi$ und addiert man beide Zeilen, so erhält man

$$\epsilon \cos \phi = \frac{p}{r} - 1,$$

also

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi}.$$