Universität Karlsruhe — Wintersemester 2003/04
Institut für Theorie der Kondensierten Materie — 17.10.03
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell — http://www-tkm.physik.uni-karlsruhe.de/lehre/
Sprechstunde: Fr 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14 — howell@tkm.physik.uni-karlsruhe.de

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 0 zur Theorie A

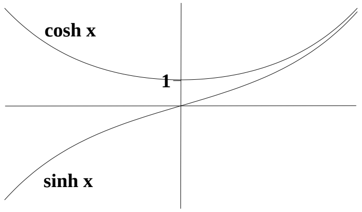
1 **a)** Für $x \to 0$:

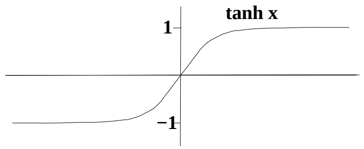
$$\begin{aligned}\cosh x &\simeq \frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)+\left(1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2}\right)\right]=1+\frac{x^2}{2}\\ \sinh x &\simeq \frac{1}{2}\left[\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)-\left(1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2}\right)\right]=x\\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}\simeq\frac{x}{1+\frac{x^2}{2}}\simeq\frac{x}{1}=x\end{aligned}$$

Für $x \to \infty$:
In diesem Bereich gilt $e^x \gg e^{-x} \Rightarrow \cosh x \simeq \frac{1}{2}e^x$, $\sinh x \simeq \frac{1}{2}e^x$, $\tanh x \simeq 1$.
Merke: da $e^{-x} > 0$ gilt $\cosh x > \frac{1}{2}e^x > \sinh x \Rightarrow \tanh x < 1$.

Für $x \to -\infty$:
In diesem Bereich gilt $e^{-x} \gg e^x \Rightarrow \cosh x \simeq \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}e^{|x|}$, $\sinh x \simeq -\frac{1}{2}e^{-x} = -\frac{1}{2}e^{|x|}$, $\tanh x \simeq -1$.

Für die Skizze hilft es, die Parität zu untersuchen:
$\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x}+e^x) = \cosh x \Rightarrow$ gerade Funktion.
$\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x}-e^x) = -\sinh x \Rightarrow$ ungerade Funktion.
$\tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x \Rightarrow$ ungerade Funktion.
Auch $\cosh(x\!=\!0) = \frac{1}{2}(e^0+e^0) = 1$, $\sinh(x\!=\!0) = \frac{1}{2}(e^0-e^0) = 0$.





b) Wir benutzen $\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right) = a\,e^{ax}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\cosh x) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x+(-e^{-x})) = \sinh x\\ \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) = \frac{1}{2}(e^x-(-e^{-x})) = \cosh x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh^2 x + \sinh^2 x &= \frac{1}{4}\left[(e^x+e^{-x})^2+(e^x-e^{-x})^2\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(e^{2x}+2+e^{-2x})+(e^{2x}-2+e^{-2x})\right] = \frac{1}{4}(2e^{2x}+2e^{-2x}) = \cosh 2x\\ 2\sinh x\cosh x &= 2\cdot\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\cdot\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = \frac{1}{2}e^{2x}-e^{-2x} = \sinh 2x\\ \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}\left[(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[(e^{2x}+2+e^{-2x})-(e^{2x}-2+e^{-2x})\right] = \frac{1}{4}(4) = 1\end{aligned}$$

2 **a)** Mit Hilfe der Kettenregel bzw. der Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}e^{\sin x} = \cos x\, e^{\sin x}$$
$$\frac{d}{dr}\frac{e^{\alpha r}}{1+\alpha r^2} = \frac{(1+\alpha r^2)\alpha\, e^{\alpha r} - e^{\alpha r}\cdot 2\alpha r}{(1+\alpha r^2)^2} = \frac{\alpha\, e^{\alpha r}(1+\alpha r^2-2r)}{(1+\alpha r^2)^2}$$

b) Sei $x = 1+\alpha u^2$

$$\Rightarrow \frac{dx}{du} = 2\alpha u \Rightarrow du = dx\,\frac{1}{2\alpha u}$$

und daher

$$\int du\,\frac{u}{1+\alpha u^2} = \int dx\,\frac{1}{2\alpha u}\frac{u}{1+\alpha u^2} = \int dx\,\frac{1}{2\alpha x} = \frac{1}{2\alpha}\ln x + c = \frac{1}{2\alpha}\ln(1+\alpha u^2)+c$$

wobei c die Integrationskonstante ist.

Mit den Formeln aus 1(b),

$$\cosh 2\theta = \cosh^2\theta + \sinh^2\theta = (1+\sinh^2\theta)+\sinh^2\theta = 1+2\sinh^2\theta$$
$$\Rightarrow \sinh^2\theta = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta - 1)$$
$$\Rightarrow \int d\theta\,\sinh^2\theta = \frac{1}{2}\int d\theta\,(\cosh 2\theta - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sinh 2\theta - \theta\right)+c = \frac{1}{4}\sinh 2\theta - \frac{\theta}{2}+c$$