

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 1 zur Theorie A

1 Zustand eines Systems

- a) Zustand definiert durch Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ und Ort $\mathbf{r}$ im Potential $V(\mathbf{r})$.
 Messbare Größen: Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, Energie $E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\mathbf{r})$, Drehimpuls $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \dots$
- b) In der Mechanik: Zustand von N Teilchen definiert durch Ortsvektoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ und Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_N$.
 Interne Energie $E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}mv_i^2$
- In der Thermodynamik: Zustand definiert durch Druck P , Volumen V , Temperatur T .
 Ideales Gasgesetz: $PV = Nk_B T$ (k_B = Boltzmann'sche Konstante)

2 Pendelsystem

- a) Impulserhaltung: $p_1 + p_2 + \dots + p_N = p_0$
 Energieerhaltung: $p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_N^2 = p_0^2$

Fall $N = 2$:

$$p_1 + p_2 = p_0, \quad p_1^2 + p_2^2 = p_0^2$$

Graphisch: Die Lösungen sind die Schnittpunkte, wo eine Gerade einen Kreis schneidet
 $\Rightarrow 2$ mögliche Lösungen:

$$p_1 = p_0, p_2 = 0 \quad \text{oder} \quad p_1 = 0, p_2 = p_0$$

Da $p_1 \leq p_2$ sein muss: $p_1 = 0, p_2 = p_0$ ist die einzige mögliche Lösung.

Fall $N = 3$:

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_0, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p_0^2$$

Graphisch: Ebene schneidet Kugel $\Rightarrow$ es gibt einen "Kreis" (eine ganz Schar) von Lösungen, etwas eingeschränkt durch die geometrische Bedingung $p_1 \leq p_2 \leq p_3$.
 (2 Gleichungen genügen nicht, 3 Parameter zu bestimmen.)
 Unter den möglichen und geometrisch erlaubten Lösungen sind

$$p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = p_0 \quad (\text{im Experiment realisiert})$$

aber auch

$$p_1 = -\frac{1}{3}p_0, p_2 = \frac{2}{3}p_0, p_3 = \frac{2}{3}p_0 \quad (\text{im Experiment nie realisiert})$$

- b) Impuls- und Energieerhaltungssatz sind nicht ausreichend, um das Experiment zu erklären.

Erklärung des Experiments:

Es handelt sich bei der Kugelkette nicht um einen einzelnen Stoßprozess, wie oben angenommen, sondern um eine Sequenz von Zwei-Kugel-Stoßprozessen. Der Grund hierfür ist, dass der Impuls eine gewisse Zeit braucht, um durch jede einzelne Kugel zu laufen. Die Aufgabe der theoretischen Physik ist es, möglichst einfache (und daher lösbare) Modelle zu konstruieren, die das wesentliche Verhalten beinhalten. Das obige Modell ist zu sehr vereinfacht und berücksichtigt einen wichtigen Aspekt des Experiments nicht. Ein einfaches Modell, das das Experiment doch richtig beschreibt, ist eine Kugelkette von infinitesimal separierten Kugeln.

3 Kurvenskizze

- a) $f(x) = f(-x) \Rightarrow$ symmetrische (gerade) Funktion.
 Merke: $e^{-4x^2/3} > 0$ für alle x .
 Nullstellen bei $f(x) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$.
 Wendepunkte bei $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 8x \cdot e^{-4x^2/3} + (4x^2 - 1) \cdot -\frac{8}{3}x e^{-4x^2/3} = -\frac{32}{3}(x^3 - x) e^{-4x^2/3}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \text{ bei } x = 0, \pm 1$$

Unterscheiden zwischen Maximum und Minimum:

$$f''(x) = -\frac{32}{3} \left[(3x^2 - 1) \cdot e^{-4x^2/3} + (x^3 - x) \cdot -\frac{8}{3}x e^{-4x^2/3} \right] = \frac{32}{9}(8x^4 - 17x^2 + 3) e^{-4x^2/3}$$

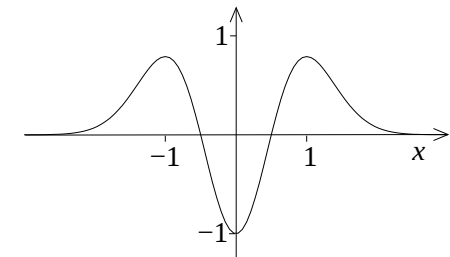
$f''(\pm 1) < 0 \Rightarrow x = \pm 1$ ist ein Maximum.

$f''(0) > 0 \Rightarrow x = 0$ ist ein Minimum mit $f(0) = -1$.

Für $x \rightarrow \pm\infty$ geht $e^{-4x^2/3}$ schneller gegen null als $4x^2 - 1$ gegen unendlich geht $\Rightarrow f(x) \rightarrow 0$.

Beweis durch de l'Hôpital'sche Gesetz (siehe z. B. Heuser, *Lehrbuch der Analysis*, 9. Auflage, S. 286):

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (4x^2 - 1) e^{-4x^2/3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 - 1}{e^{4x^2/3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8x}{\frac{8}{3}x e^{4x^2/3}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 3 e^{-4x^2/3} = 0$$



b) Nullstellen bei $f(x) = 0$:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x + 2} \Rightarrow f(x) = 0 \text{ bei } x = -1, 2$$

Wendepunkte bei $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{(x + 2) \cdot (2x - 1) - (x^2 - x - 2) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{x(x + 4)}{(x + 2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \text{ bei } x = 0, -4$$

Unterscheiden zwischen Maximum und Minimum:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x + 2)^2 \cdot (2x + 4) - (x^2 + 4x) \cdot 2(x + 2)}{(x + 2)^4} \\ &= \frac{2(x + 2) [(x^2 + 4x + 4) - (x^2 + 4x)]}{(x + 2)^4} = \frac{8}{(x + 2)^3} \end{aligned}$$

$f''(-4) < 0 \Rightarrow x = -4$ ist ein Maximum mit $f(-4) = -9$.

$f''(0) > 0 \Rightarrow x = 0$ ist ein Minimum mit $f(0) = -1$.

Für $x \rightarrow \pm\infty$ ist nur der größte Term im Zähler bzw. Nenner wichtig:

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2} \simeq \frac{x^2}{x} = x \Rightarrow f(x) \text{ ist linear für } x \rightarrow \pm\infty$$

Für $x = -2$ divergiert $f(x)$. Der Zähler ist hier positiv, also

$f(x) \rightarrow +\infty$ wenn x gegen -2 von oben geht ($x \rightarrow -2^+$), da $x + 2 > 0$,

$f(x) \rightarrow -\infty$ wenn x gegen -2 von unten geht ($x \rightarrow -2^-$), da $x + 2 < 0$.

