Universität Karlsruhe — Wintersemester 2003/04
Institut für Theorie der Kondensierten Materie — 31.10.03
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell — http://www-tkm.physik.uni-karlsruhe.de/lehre/
Sprechstunde: Fr 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14 — howell@tkm.physik.uni-karlsruhe.de

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 2 zur Theorie A

1 Relativistisches Teilchen

a) Geschwindigkeit definiert durch $v = \frac{\partial E(p)}{\partial p}$. Einsetzen von $E(p) = \sqrt{(m_0c^2)^2 + p^2c^2}$ liefert:

$$v(p) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\sqrt{(m_0c^2)^2 + p^2c^2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2pc^2}{\sqrt{(m_0c^2)^2 + p^2c^2}} = \frac{pc^2}{E}$$

Relativistische Masse definiert durch $p = mv$. Einsetzen:

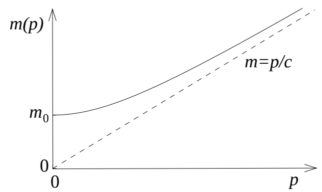
$$v = \frac{mvc^2}{E} \Rightarrow \boxed{E = mc^2}$$

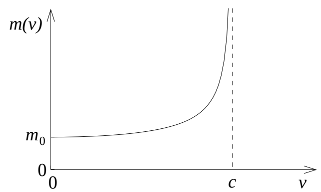
$E(p)$ einsetzen:

$$mc^2 = c^2\sqrt{(m_0)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2} \Rightarrow m(p) = \sqrt{(m_0)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}$$

Quadrieren:

$$m^2 = (m_0)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2 = (m_0)^2 + m^2\left(\frac{v}{c}\right)^2 \Rightarrow m^2\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right] = (m_0)^2 \Rightarrow m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$





Merke: $p \to \infty$ erlaubt in $m(p)$, aber $v < c$ in $m(v)$.

b) Reihenentwicklung für $m(v)$:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \simeq m_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right] \simeq m_0\left[\underbrace{1}_{\text{NR Term}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}_{\text{1. Korrektur}}\right]$$

Reihenentwicklung für $E(p)$:

$$E(p) = m_0c^2\sqrt{1 + \frac{p^2c^2}{(m_0c^2)^2}} \simeq m_0c^2\left[\underbrace{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{m_0^2c^2}\right)}_{\text{NR Term}} - \underbrace{\frac{1}{8}\left(\frac{p^2}{m_0^2c^2}\right)^2}_{\text{1. Korrektur}}\right]$$

Jetzt ausdrücken als Funktion von v statt p, zu vierter Ordnung in v. Wir brauchen:

$$p = mv = \frac{m_0v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \simeq m_0v\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow p^2 = m_0^2v^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right)^2 = m_0^2v^2\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \cdots\right)$$

$$\text{und } p^4 = m_0^4v^4\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right)^4 = m_0^4v^4 + \cdots$$

Substituieren in $E(p)$:

$$\begin{aligned} E(v) &= m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{m_0^2v^2(1 + \frac{v^2}{c^2} + \cdots)}{m_0^2c^2} - \frac{1}{8}\frac{(m_0^4v^4 + \cdots)}{m_0^4c^4}\right] \\ &= m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right] \\ &= \underbrace{m_0c^2}_{\text{Ruheenergie}} + \frac{1}{2}m_0v^2\left(\underbrace{1}_{\text{NR Term}} + \underbrace{\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}}_{\text{1. Korrektur}} + \cdots\right) \end{aligned}$$

Relativistische Abweichung der Masse vom nichtrelativistischen Grenzfall:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Rightarrow \frac{m(v)}{m_0} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots$$

Abweichung von 1%:

$$\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = 0,01 \Rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{0,02} \simeq 0,14 = 14\%$$

2 Reihenentwicklung

Taylor-Reihe um $x = 0$:

$$f(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2!}\,f''(0) + \frac{x^3}{3!}\,f'''(0) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\,f^{(n)}(x)|_{x=0}$$

a) $f(x) = \sin(x)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \sin(0) &&= 0 \\ f'(0) &= \cos(0) &&= 1 \\ f^{(2)}(0) &= -\sin(0) &&= 0 \\ f^{(3)}(0) &= -\cos(0) &&= -1 \\ f^{(4)}(0) &= \sin(0) &&= 0 \\ f^{(5)}(0) &= \cos(0) &&= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$$

b) $f(x) = \cos(x)$:

$$\begin{aligned} f(0) &= \cos(0) &&= 1 \\ f'(0) &= -\sin(0) &&= 0 \\ f^{(2)}(0) &= -\cos(0) &&= -1 \\ f^{(3)}(0) &= \sin(0) &&= 0 \\ f^{(4)}(0) &= \cos(0) &&= 1 \\ f^{(5)}(0) &= -\sin(0) &&= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

c) $f(x) = (1+x)^\nu$, mit ν beliebig (ganze Zahl oder auch nicht).

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f^{(1)}(0) &= \nu(1+x)^{\nu-1}|_{x=0} = \nu \\ f^{(2)}(0) &= \nu(\nu-1)(1+x)^{\nu-2}|_{x=0} = \nu(\nu-1) \\ f^{(3)}(0) &= \nu(\nu-1)(\nu-2)(1+x)^{\nu-3}|_{x=0} = \nu(\nu-1)(\nu-2) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(0) &= \nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= 1 + \nu x + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} x^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} x^3 + \cdots \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-n+1)}{n!} x^n \end{aligned}$$

Sonderfall: falls ν ganze Zahl ≥ 0, bricht die Reihe bei $n = \nu$ ab.

d*) Wir schreiben die geometrische Reihe in der folgenden Form:

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{mit } a_n = x^n$$

Es ist bekannt (siehe Vorlesung), dass T konvergent ist falls $|x| < 1$. Wenn wir den Quotient zweier aufeinander folgender Glieder bilden, gilt daher

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x| < 1\,.$$

Jede andere Reihe $S = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist ebenfalls konvergent, falls ein $c < 1$ und eine Ganzzahl N existieren, für die $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < c$ für alle $n > N$. Beweis: ein x existiert, für das $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = x < 1$ gilt, z. B. $x = c$. Damit gehen die Glieder in S schneller gegen null als die Glieder in der konvergenten Reihe T.

sin (*x*)-Reihe:

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right| = \frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} < 1$$

für beliebiges x und genügend großes n (z. B. $n > x/2$).

cos (*x*)-Reihe: analog

binomische Reihe:

$$\begin{aligned} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| &= \left|\frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-(n+1)+1)\,x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-n+1)\,x^n}\right| \\ &= \left|\frac{(\nu-n)\,x}{n+1}\right| = |x| \left|\frac{n}{n+1} - \frac{\nu}{n+1}\right| \end{aligned}$$

Für großes n heißt das $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = |x| \cdot 1 \Rightarrow$ konvergent nur für $|x| < 1$.

Ausnahme: wenn ν Ganzzahl ≥ 0, bricht die Reihe bei $n = \nu$ ab, also die Summe konvergiert für alle x.

$\boxed{3}$ Reihensumme

Erste Methode:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\ \widetilde{S} = \int S\,\mathrm{d}x &= \int (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots)\,\mathrm{d}x \\ &= c + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ &= (c-1) + \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots}_{\text{geometrische Reihe}} \end{aligned}$$

Sei T die geometrische Reihe:

$$\begin{aligned} T &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ xT &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \\ \Rightarrow T - xT &= 1 \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

Substituieren in $\widetilde{S}$ und Differenzieren:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\mathrm{d}\widetilde{S}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(c - 1 + \frac{1}{1-x}\right) \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Zweite Methode:

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\ xS &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots \\ \Rightarrow S - xS &= \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots}_{=T} = \frac{1}{1-x} \\ \Rightarrow S &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Offensichtlich konvergiert S nur für $|x| < 1$.