Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell
Sprechstunde: Fr 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14

Wintersemester 2003/04
31.10.03
http://www-tkm.physik.uni-karlsruhe.de/lehre/
howell@tkm.physik.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 3 zur Theorie A

1 Differenzieren

a) Gegeben seien $f(z) = \tan z$ und $g(z) = \arctan z$. Berechnen Sie $f'(z)$ und $g'(z)$.
Hinweis zu $g'(z)$: Wenden Sie den Tangens auf beide Seiten der Gleichung an, bevor Sie bezüglich z differenzieren.

Beweisen Sie nun

$$\arctan \xi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\xi} \,. \tag{1}$$

Hinweis: Differenzieren Sie beide Seiten.

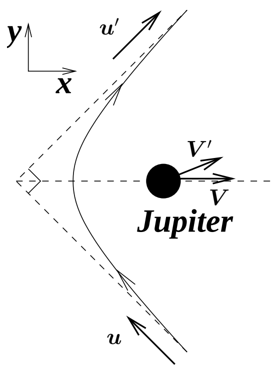
b) Gegeben sei eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen θ und y:

$$f(y,\theta) = \ln\left[\frac{1+\theta}{y}\tan\left(\frac{y^2\theta}{2}\right)\right] \,.$$

- Differenzieren Sie f bezüglich θ bei festem y.
- Differenzieren Sie f bezüglich y bei festem θ.
- Welches Resultat ergibt sich für die gemischte Ableitung, wenn Sie zuerst f nach θ und danach nach y differenzieren? Und was ergibt sich, wenn Sie zuerst f nach y und danach nach θ differenzieren?

2 "Swing-By"

Die Cassini Raumsonde ist momentan unterwegs zum Saturn, und in März dieses Jahres hat sie Energie durch ein "swing-by" an Jupiter gewonnen. Wir untersuchen den vereinfachten Fall einer symmetrischen Bahnumlenkung mit einem Winkel von 45° gegen die Jupiterbahn (siehe Abbildung).



Vor dem "swing-by" sei die Geschwindigkeit der Raumsonde $\boldsymbol{u}$ und die Jupiters $\boldsymbol{V}$; danach seien sie $\boldsymbol{u}'$ bzw. $\boldsymbol{V}'$. Nehmen Sie an, dass Jupiter sich ursprünglich entlang die x-Achse bewegt.

a) Stellen Sie die Gleichungen für Energie- und Impulserhaltung auf. Mit Hilfe der Impulserhaltung können Sie $\boldsymbol{V}'$ eliminieren und eine quadratische Gleichung für u'_x herleiten. Vergessen Sie nicht, die Geometrie des "swing-by" zu benutzen!

b) Lösen Sie die quadratische Gleichung für u'_x und entwicklen Sie das Ergebnis zu linearer Ordnung in $\frac{m}{M}$ (d. h. Sie sollten Terme in $\frac{m^2}{M^2}$ vernachlässigen).
Hinweis: Formel aus Blatt 2, Aufgabe 2c benutzen.

Welchen Bahnen der Raumsonde entsprechen die zwei Lösungen? Wieviel kinetische Energie gewinnt die Raumsonde auf der abgebildeten Bahn?

3 Bahnkurve

Ein Teilchen bewegt sich in der x-y-Ebene auf der Bahnkurve

$$x(t) = R\,\mathrm{e}^{\alpha t} \sin \omega t$$
$$y(t) = R\,\mathrm{e}^{\alpha t} \cos \omega t$$

mit konstanten Parametern R, α, ω.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = (v_x(t), v_y(t))$ und die Beschleunigung $\boldsymbol{a} = (a_x(t), a_y(t))$ sowie ihre Beträge $v(t) = |\boldsymbol{v}(t)|$ und $a(t) = |\boldsymbol{a}(t)|$.

b) Skizzieren Sie die Bahnkurve für die zwei Fälle $\alpha > 0$ und $\alpha < 0$.

Die zurückgelegte Strecke $s(t)$, gemessen ab $t = 0$, ist gegeben durch

$$s(t) = \int_0^t |v(t')|\,\mathrm{d}t' \,.$$

Berechnen Sie $s(t)$.

Was ergibt sich im Limes $\alpha \to 0$? Können Sie das erklären?

Was ist die zurückgelegte Strecke im Limes $t \to \infty$ im Fall $\alpha < 0$? Wo befindet sich das Teilchen?

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Freitag, den 7.11.03 —