

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 3 zur Theorie A**1 Differenzieren**

a) **$f(z)$** : Quotientenregel benutzen: $f = \frac{u}{v} \Rightarrow f' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$

$$f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \Rightarrow f'(z) = \frac{\cos z \cdot \cos z - \sin z \cdot -\sin z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} = \sec^2 z$$

$g(z)$: Kettenregel benutzen: $\frac{d}{dz} g(y(z)) = y'(z) g'(y(z))$

$$g(z) = \arctan z \Rightarrow \tan g(z) = z \xrightarrow{\frac{d}{dz}} g'(z) \sec^2 g(z) = 1$$

Nun $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$, also $\sec^2 g(z) = 1 + \tan^2 g(z) = 1 + z^2$

$$\Rightarrow g'(z)(1 + z^2) = 1 \Rightarrow g'(z) = \frac{1}{1 + z^2}$$

Beweis der Identität: zuerst $y = \arctan \frac{1}{\xi}$ mit der Kettenregel differenzieren:

$$\text{Sei } x = \frac{1}{\xi} \Rightarrow y = \arctan x \Rightarrow \frac{dy}{d\xi} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{-1}{\xi^2} = \frac{1}{1+\xi^{-2}} \cdot \frac{-1}{\xi^2} = -\frac{1}{1+\xi^2}$$

Jetzt Gleichung (1) auf dem Aufgabenblatt differenzieren:

$$\arctan \xi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{\xi} \xrightarrow{\frac{d}{d\xi}} \frac{1}{1+\xi^2} = 0 - \left(-\frac{1}{1+\xi^2} \right) \quad \checkmark$$

Die rechte Gleichung ist eindeutig erfüllt, also wenn wir sie integrieren, bekommen wir

$$\arctan \xi = -\arctan \frac{1}{\xi} + c$$

wobei c die Integrationskonstante ist. Um c zu bestimmen, setze $\xi = 1 \Rightarrow c = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$.

b) Wir benutzen $\frac{d}{dx} [\ln f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)}$ und die Kettenregel.

$$\begin{aligned} f(y, \theta) &= \ln \left[\frac{1+\theta}{y} \tan \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right) \right] = \ln(1+\theta) - \ln y + \ln \left[\tan \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right) \right] \\ \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{1}{1+\theta} + \frac{\frac{y^2}{2} \sec^2 \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right)}{\tan \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right)} = \frac{1}{1+\theta} + \frac{y^2}{2 \sin \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right)} = \frac{1}{1+\theta} + \frac{y^2}{\sin y^2 \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{1}{y} + \frac{y \theta \sec^2 \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right)}{\tan \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right)} = -\frac{1}{y} + \frac{y \theta}{\sin \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right) \cos \left(\frac{y^2 \theta}{2} \right)} = -\frac{1}{y} + \frac{2y \theta}{\sin y^2 \theta} \end{aligned}$$

Jetzt benutzen wir die Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial \theta} &= \frac{\sin y^2 \theta \cdot 2y - y^2 \cdot 2y \theta \cos y^2 \theta}{\sin^2(y^2 \theta)} = \frac{2y(1 - y^2 \theta \cot y^2 \theta)}{\sin y^2 \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\sin y^2 \theta \cdot 2y - 2y \theta \cdot y^2 \cos y^2 \theta}{\sin^2(y^2 \theta)} = \frac{2y(1 - y^2 \theta \cot y^2 \theta)}{\sin y^2 \theta} \end{aligned}$$

Bei der gemischten Ableitung spielt die Reihenfolge der Ableitungen keine Rolle (außer bei pathologischen Funktionen).

2 “Swing-By”

a) Impulserhaltung in x - und y -Richtung:

$$mu_x + MV_x = mu'_x + MV'_x \quad (1)$$

$$mu_y + MV_y = mu'_y + MV'_y \quad (2)$$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m \mathbf{u}^2 + \frac{1}{2} M \mathbf{V}^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{u}'^2 + \frac{1}{2} M \mathbf{V}'^2 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m(u_x^2 + u_y^2) + \frac{1}{2} M(V_x^2 + V_y^2) = \frac{1}{2} m(u_x'^2 + u_y'^2) + \frac{1}{2} M(V_x'^2 + V_y'^2) \quad (4)$$

Aus der Geometrie folgt $u_y = -u_x$ und $u'_y = u'_x$. Außerdem gilt $V_y = 0$. Einsetzen in (1) und (2) liefert:

$$V'_x = V_x + \frac{m}{M}(u_x - u'_x) \quad (5)$$

$$V'_y = -\frac{m}{M}(u_x + u'_x) \quad (6)$$

Einsetzen in (4):

$$\begin{aligned} mu_x^2 + \frac{1}{2} MV_x^2 &= mu_x'^2 + \frac{1}{2} M(V_x^2 + V_y^2) \\ \Rightarrow u_x^2 + \frac{M}{2m} V_x^2 &= u_x'^2 + \frac{M}{2m} \left[\left(V_x + \frac{m}{M}(u_x - u'_x) \right)^2 + \left(\frac{m}{M}(u_x + u'_x) \right)^2 \right] \\ \Rightarrow u_x'^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) - V_x u'_x + u_x^2 \left(\frac{m}{M} - 1 \right) + V_x u_x &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

b) Lösung von (7) mit Hilfe der Standardformel für eine quadratische Gleichung:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{1}{1 + \frac{m}{M}} \left[\frac{V_x}{2} \pm \sqrt{\frac{V_x^2}{4} - \left(1 + \frac{m}{M} \right) \left(u_x^2 \left(\frac{m}{M} - 1 \right) + V_x u_x \right)} \right] \\ &= \left(1 + \frac{m}{M} \right)^{-1} \left[\frac{V_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{V_x}{2} - u_x \right)^2 - \frac{m}{M} V_x u_x - \frac{m^2}{M^2} u_x^2} \right] \\ &= \left(1 + \frac{m}{M} \right)^{-1} \left[\frac{V_x}{2} \pm \left(\frac{V_x}{2} - u_x \right) \sqrt{1 - \frac{m}{M} \frac{V_x u_x}{\left(\frac{V_x}{2} - u_x \right)^2} - \frac{m^2}{M^2} \frac{u_x^2}{\left(\frac{V_x}{2} - u_x \right)^2}} \right] \end{aligned}$$

Jetzt entwickeln zu linearer Ordnung in $\frac{m}{M}$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow u'_x &= \left(1 - \frac{m}{M} + \dots\right) \left[\frac{V_x}{2} \pm \left(\frac{V_x}{2} - u_x\right) \left(1 - \frac{m}{2M} \frac{V_x u_x}{\left(\frac{V_x}{2} - u_x\right)^2} + \dots\right) \right] \\ &= \frac{V_x}{2} \pm \left(\frac{V_x}{2} - u_x\right) + \frac{m}{M} \left[-\left(\frac{V_x}{2} \pm \left(\frac{V_x}{2} - u_x\right)\right) \mp \frac{V_x u_x}{2\left(\frac{V_x}{2} - u_x\right)} \right] + \dots \\ &= \begin{cases} V_x - u_x - \frac{m}{M} \frac{V_x^2 - 2V_x u_x + 2u_x^2}{V_x - 2u_x} & (\text{obere Zeichen in der Wurzel}) \\ u_x + \frac{m}{M} \frac{2u_x^2}{V_x - 2u_x} & (\text{obere Zeichen in der Wurzel}) \end{cases} \end{aligned}$$

Im Limes $\frac{m}{M} \rightarrow 0$ bedeutet die 2. Lösung, dass die Raumsonde weiter nach links fliegt, da $u'_x = u_x < 0$. Die 1. Lösung ist die abgebildete: es gilt $V_x > 0, u_x < 0 \Rightarrow u'_x > 0 \Rightarrow$ die Raumsonde fliegt nach rechts. (Siehe Abbildung unten.)

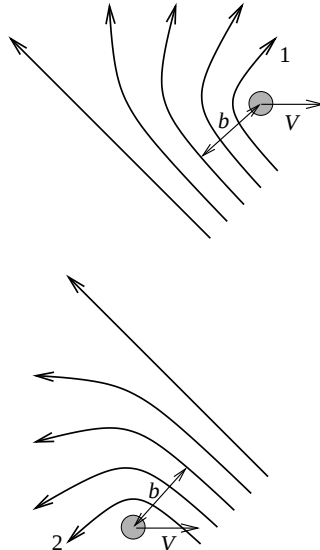
Gewonnene kinetische Energie (zu führender Ordnung):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \text{KE}}{\text{KE}} &= \frac{\frac{1}{2} m \mathbf{u}'^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{u}^2}{\frac{1}{2} m \mathbf{u}^2} = \frac{\mathbf{u}'^2}{\mathbf{u}^2} - 1 = \frac{u_x'^2 + u_y'^2}{u_x^2 + u_y^2} - 1 \\ &= \frac{2u_x'^2}{2u_x^2} - 1 \simeq \frac{(V_x - u_x)^2}{u_x^2} - 1 = \frac{V_x(V_x - 2u_x)}{u_x^2} \end{aligned}$$

Da $u_x < 0$ ist die Energieänderung immer positiv $\Rightarrow$ die Raumsonde fliegt schneller.

Bemerkung:

Das Gravitationsfeld des Planeten wirkt als “Streupotential” für ein Proben teilchen, die Raumsonde. Im Allgemeinen hängt die Streurichtung des Proben teilchens von der Form des Streupotentials und von dem sogenannten Stoßparameter b ab (Stichwort “Streuquerschnitt”). Hier haben wir explizit nur die Lösungen mit $u'_x = u'_y$ gesucht, also 1 und 2 in der Abbildung rechts. Welche der beiden relevant ist, hängt vom Stoßparameter b und damit von den Anfangsbedingungen ab — für andere Werte von b ist keine der beiden relevant.

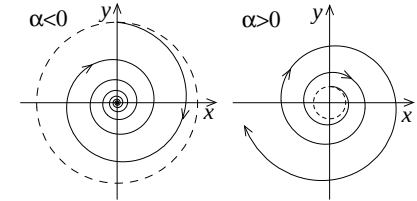


3 Bahnkurve

a)

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R e^{\alpha t} \sin \omega t \\ R e^{\alpha t} \cos \omega t \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}(t) &= \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R e^{\alpha t} (\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \\ R e^{\alpha t} (\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{a}(t) &= \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R e^{\alpha t} [(\alpha^2 - \omega^2) \sin \omega t + 2\alpha \omega \cos \omega t] \\ R e^{\alpha t} [-2\alpha \omega \sin \omega t + (\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t] \end{pmatrix} \\ v(t) &= \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = R e^{\alpha t} \sqrt{(\alpha \sin \omega t + \omega \cos \omega t)^2 + (\alpha \cos \omega t - \omega \sin \omega t)^2} \\ &= R e^{\alpha t} \sqrt{(\alpha^2 + \omega^2)(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = R e^{\alpha t} \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \\ a(t) &= \sqrt{a_x^2(t) + a_y^2(t)} \\ &= R e^{\alpha t} \sqrt{[(\alpha^2 - \omega^2) \sin \omega t + 2\alpha \omega \cos \omega t]^2 + [-2\alpha \omega \sin \omega t + (\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t]^2} \\ &= R e^{\alpha t} \sqrt{(\alpha^2 + \omega^2)^2 \sin^2 \omega t + (\alpha^2 + \omega^2)^2 \cos^2 \omega t} = R e^{\alpha t} (\alpha^2 + \omega^2) \end{aligned}$$

b) Die gestrichelte Linie zeigt den Kreis mit Radius R .



$$s(t) = \int_0^t |v(t')| dt' = R \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \int_0^t dt' e^{\alpha t'} = R \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha}$$

Im Limes $\alpha \rightarrow 0$ entwickeln wir $e^{\alpha t}$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} s(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} R \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \frac{(1 + \alpha t + \dots) - 1}{\alpha} = R \omega t$$

In diesem Limes bewegt sich das Teilchen mit Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit Radius R , wobei $s = R \omega t$ der Standardausdruck für die Bogenlänge ist.

Für $\alpha < 0$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} = 0$, also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = R \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \left(\frac{-1}{\alpha} \right) = R \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \frac{1}{|\alpha|}.$$

Nach einer unendlichen Zeit ist die zurückgelegte Strecke endlich, und das Teilchen befindet sich bei $(x, y) = (0, 0)$. (Für $\alpha > 0$ ist die zurückgelegte Strecke unendlich im Limes $t \rightarrow \infty$.)