

Übungsblatt Nr. 4 zur Theorie A

1 Skalarfelder

Gegeben seien die Skalarfelder

$$\phi_1(x, y) = e^{x^2 - y^2}, \quad \phi_2(x, y) = \frac{1}{x^2 + 4y^2 + 1}.$$

Veranschaulichen Sie die Felder durch Skizzieren der Höhenlinien (d. h. die Linien mit $\phi(x, y) = \text{const.}$) in der x - y -Ebene.

2 Vektorfelder

(a) Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, wobei $\mathbf{r} = (x, y)$. Veranschaulichen Sie das Kraftfeld durch

- Skizzieren von Vektoren $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ in der x - y -Ebene (es ist hilfreich, zunächst Linien mit $|\mathbf{F}| = \text{const.}$ zu zeichnen);
- Zeichnen von Feldlinien in der x - y -Ebene.

(b) Berechnen Sie die geleistete Arbeit auf den folgenden Wegen von $\mathbf{r}_0 = (0, 0)$ nach $\mathbf{r}_1 = (1, 2)$:

- Eine Gerade C_1 von \mathbf{r}_0 nach \mathbf{r}_1 .
- Eine Gerade C_2 von \mathbf{r}_0 nach $\mathbf{r}' = (1, 0)$, gefolgt von einer Gerade C_3 von \mathbf{r}' nach \mathbf{r}_1 .

Hinweis: Am besten parameterisieren Sie den Weg von $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zu $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ als $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c-a \\ d-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+t(c-a) \\ b+t(d-b) \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1]$.

(c) Das gleiche wie (a) für $\mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{-y}{5 + x^2 + y^2} \\ \frac{x}{5 + x^2 + y^2} \end{pmatrix}$.

Hinweis: Es ist hilfreich, die Feldstärke $|\mathbf{F}_2(\mathbf{r})|$ in eine vernünftig ausgewählte Richtung zu betrachten.

(d) Das gleiche wie (b) für \mathbf{F}_2 und $\mathbf{r}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{r}' = (2, 2)$ und $\mathbf{r}_2 = (2, 4)$.

Hinweis: Sie können alle Integrale in der Form von $g'(z)$ aus Blatt 3, Aufgabe 1(a) schreiben.