

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 4 zur Theorie A

1 Skalarfelder

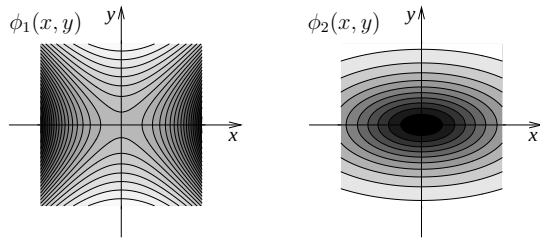
Höhenlinien: $\phi(x, y) = \text{const.}$

$\phi_1(x, y) = \text{const} \Rightarrow x^2 - y^2 = \text{const} \Rightarrow$ Hyperbeln.

Auch $\phi_1(x, y) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und $\phi_1(x, y) \rightarrow 0$ für $y \rightarrow \pm\infty$.

$\phi_2(x, y) = \text{const} \Rightarrow x^2 + 4y^2 = \text{const} \Rightarrow$ Ellipsen mit großer Achse in x -Richtung doppelt so groß wie die kleine Achse in y -Richtung.

$\phi_2(x, y)$ hat ein Maximum bei $(0, 0)$ und $\phi_2(x, y) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm\infty$ oder $y \rightarrow \pm\infty$.

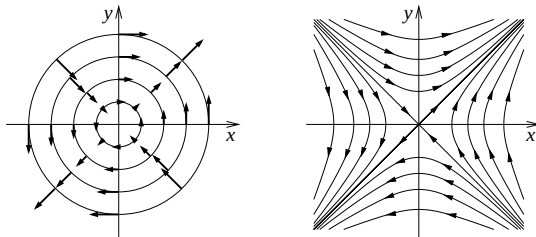


(Je dunkler, desto höher der Wert von ϕ .)

2 Vektorfelder

(a) $|\mathbf{F}_1(\mathbf{r})| = \text{const} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const} \Rightarrow$ Kreise in der x - y -Ebene.

In der Physik folgen die Feldlinien der Richtung von $\mathbf{F}$ und die Dichte der Linien ist proportional zu $|\mathbf{F}|$. (In der Mathematik ist die Definition etwas anders.)



(b) Weg von $\mathbf{r}_0$ nach $\mathbf{r}_1$ mit t parameterisieren: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ mit $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$.

Geleistete Arbeit:

$$W = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt$$

Entlang C_1 : $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix}, t \in [0, 1] \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$W_1 = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 4t dt = 2$$

Entlang C_2 : $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0, 1] \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$W_2 = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

Merke: $C_2 = 0$ da Bewegung senkrecht zu den Feldlinien.

Entlang C_3 : $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, t \in [0, 1] \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$W_3 = \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2 dt = 2$$

$C_2 + C_3 = C_1 \Rightarrow$ Arbeit (vermutlich) unabhängig vom Weg.

Merke: Man kann beweisen, dass die Arbeit vom Weg unabhängig ist, wenn man allgemeine Endpunkte $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ betrachtet $\Rightarrow \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} a+t(c-a) \\ b+t(d-b) \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1} &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} b+t(d-b) \\ a+t(c-a) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c-a \\ d-b \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 [b(c-a) + a(d-b) + 2t(d-b)(c-a)] dt \\ &= b(c-a) + a(d-b) + (d-b)(c-a) = cd - ab \end{aligned}$$

Wenn der Weg über den Zwischenpunkt $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ läuft, ist die geleistete Arbeit unverändert:

$$W = W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}'} + W_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_1} = (ef - ab) + (cd - ef) = cd - ab = W_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}_1}$$

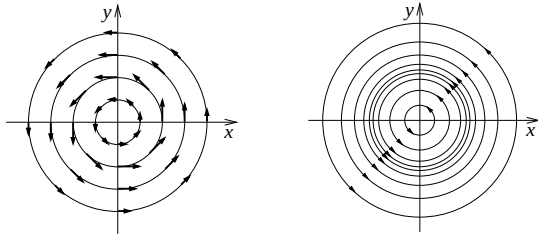
Beliebige Wege lassen sich als Aneinanderreihung infinitesimaler, stückweise linearer Wege schreiben.

(c) $|\mathbf{F}(\mathbf{r})|^2 = \text{const} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{(5 + x^2 + y^2)^2} = \text{const} \Rightarrow x^2 + y^2 = \text{const}$
 $\Rightarrow$ Kreise in der x - y -Ebene.

Da die Feldstärke nicht von der Richtung abhängt, betrachten wir sie in eine passend gewählte Richtung: entlang der x -Achse

$$|\mathbf{F}(\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix})| = \left| \frac{\sqrt{x^2 + 0^2}}{5 + x^2 + 0^2} \right| = \left| \frac{x}{5 + x^2} \right|$$

$\Rightarrow$ die Feldstärke geht gegen null für $|x| \rightarrow 0$ und $|x| \rightarrow \infty$ und nimmt ein Maximum an bei $|x| = \sqrt{5}$.



(d) Entlang C_1 : $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2+2t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1] \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{1}{5+x^2(t)+y^2(t)} \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{5+(1+t)^2+(2+2t)^2} \begin{pmatrix} -(2+2t) \\ 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt = 0 \end{aligned}$$

Entlang C_2 : $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1] \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} W_2 &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}'} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{1}{5+(1+t)^2+2^2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1+t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \frac{-2}{(t+1)^2+9} dt = \frac{-2}{9} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{t+1}{3}\right)^2+1} dt \end{aligned}$$

Sei $z = \frac{t+1}{3} \Rightarrow dt = 3dz$ und benutze $\frac{d}{dz}(\arctan z) = \frac{1}{1+z^2}$ von Blatt 3, Aufgabe 1(a):

$$\Rightarrow W_2 = -\frac{2}{9} \int_{1/3}^{2/3} \frac{1}{z^2+1} 3dz = -\frac{2}{3} [\arctan z]_{z=1/3}^{2/3} = -\frac{2}{3} \left(\arctan \frac{2}{3} - \arctan \frac{1}{3} \right)$$

Entlang C_3 : $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2+2t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1] \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} W_3 &= \int_{\mathbf{r}'}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \frac{1}{5+2^2+(2+2t)^2} \begin{pmatrix} -(2+t) \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \frac{4}{9+(2+2t)^2} dt = \frac{4}{9} \int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{2+2t}{3}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Sei $z = \frac{2+2t}{3} \Rightarrow dt = \frac{3}{2}dz$:

$$\Rightarrow W_3 = \frac{4}{9} \int_{2/3}^{4/3} \frac{1}{1+z^2} \frac{3}{2} dz = \frac{2}{3} [\arctan z]_{z=2/3}^{4/3} = \frac{2}{3} \left(\arctan \frac{4}{3} - \arctan \frac{2}{3} \right)$$

Geleistete Arbeit entlang $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_1$:

$$W_2 + W_3 = \frac{2}{3} \left(\arctan \frac{4}{3} - 2 \arctan \frac{2}{3} + \arctan \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \arctan \frac{123}{836} \simeq 0,0487 \neq W_1$$

Merke: Die geleistete Arbeit hängt vom Weg ab, also existiert kein Potential $V(\mathbf{r})$ mit $\mathbf{F}_2 = -\text{grad } V(\mathbf{r})$.