

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 5 zur Theorie A

1 Potential eines Vektorfeldes

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} F_{1x}(\mathbf{r}) \\ F_{1y}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} = 1$$

$\Rightarrow$ es existiert ein Potential $V(\mathbf{r})$.

Weg von $(0,0)$ zu (x', y') parameterisieren: $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} tx' \\ ty' \end{pmatrix}$, $t \in [0, 1] \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$W = \int_0^{(x', y')} \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} ty' \\ tx' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt = \int_0^1 2tx'y' dt = x'y'$$

Das Potential hat das andere Vorzeichen als die geleistete Arbeit $\Rightarrow V(\mathbf{r}) = -xy$

$$\text{Überprüfen: } -\nabla V = -\begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \mathbf{F}_1(\mathbf{r}) \quad \checkmark$$

$$\mathbf{F}_2(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} F_{2x}(\mathbf{r}) \\ F_{2y}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{5+x^2+y^2} \\ \frac{x}{5+x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_{2x}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{5+x^2+y^2} \right) = \frac{(5+x^2+y^2) \cdot (-1) - (-y) \cdot 2y}{(5+x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 - 5}{(5+x^2+y^2)^2}$$

$$\text{und } \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{5+x^2+y^2} \right) = \frac{(5+x^2+y^2) \cdot 1 - x \cdot 2x}{(5+x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 + 5}{(5+x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow$ es existiert kein Potential $V(\mathbf{r})$.

2 Feldlinien

(a) Mit der Parameterisierung aus Aufgabe 1:

$$V(x', y') = -\int_0^1 \begin{pmatrix} 2tx' \cdot ty' \\ (tx')^2 - ty' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt = -\int_0^1 (3t^2 x'^2 y' - ty'^2) dt = -x'^2 y' + \frac{1}{2} y'^2$$

Äquipotentiallinien:

$$V(x, y) = \frac{V_0}{2} \Rightarrow -x^2 y + \frac{1}{2} y^2 = \frac{V_0}{2} \Rightarrow y^2 - 2x^2 y - V_0 = 0 \Rightarrow y = x^2 \pm \sqrt{x^4 + V_0}$$

(b) Beachte: $V(-x, y) = V(x, y) \Rightarrow$ es reicht, nur $x > 0$ zu betrachten, da das Potential (und daher die Feldlinien) symmetrisch bezüglich $x = 0$ ist.

$$V_0 = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ und } y = 2x^2$$

y muss reell sein $\Rightarrow x^4 + V_0 > 0$. Falls $V_0 < 0$ heisst das, $x^4 - |V_0| > 0 \Rightarrow x > |V_0|^{1/4}$. Für $x^4 \gg |V_0|$ gilt:

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^4 + V_0} = x^2 \pm x^2 \sqrt{1 + \frac{V_0}{x^4}} = x^2 \left[1 \pm \left(1 + \frac{V_0}{2x^4} + \dots \right) \right] \\ \Rightarrow y = 2x^2 + \frac{V_0}{2x^2} + \dots \quad \text{und} \quad y = -\frac{V_0}{2x^2} + \dots \quad (1)$$

Für $V_0 = V_- < 0$ bedeutet das, dass die Äquipotentiallinien knapp unterhalb der Linie $y = 2x^2$ und knapp oberhalb der Linie $y = 0$ liegen, also zwischen den Äquipotentialen mit $V_0 = 0$ (siehe linke Skizze unten).

(c) Extrema in $y(x) = x^2 \pm \sqrt{x^4 + V_+}$ bestimmen:

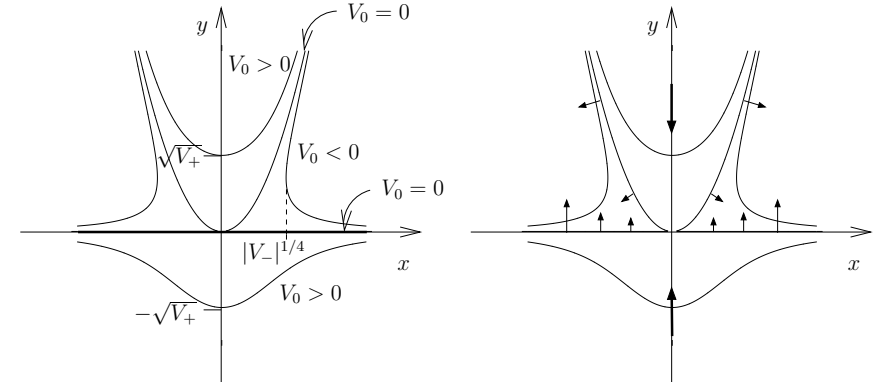
$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + V_+}} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^4 + V_+}} \left(\sqrt{x^4 + V_+} \pm x^2 \right) = 0$$

Da $V_+ > 0$ gilt $\sqrt{x^4 + V_+} > x^2$, also ist die einzige Lösung $x = 0$. Art der Extrema:

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} = \left(2 \pm \frac{\sqrt{x^4 + V_+} \cdot 6x^2 - 2x^3 \cdot \frac{2x^3}{\sqrt{x^4 + V_+}}}{x^4 + V_+} \right) \Big|_{x=0} = 2 > 0$$

$\Rightarrow$ Minima bei $x = 0$, $y = \pm \sqrt{V_+}$.

Die Entwicklung (1) für $|x| \gg |V_0|$ gilt weiterhin, also für $V_0 = V_+ > 0$ bedeutet das, dass die Äquipotentiale knapp oberhalb der Linie $y = 2x^2$ und knapp unterhalb der Linie $y = 0$ liegen (siehe linke Skizze unten).



(d) Am Äquipotential mit $V_0 = 0$: $y = 0 \Rightarrow \mathbf{F}(x, 0) = (0, x^2) \Rightarrow$ Feldvektoren zeigen nach oben.

Am Äquipotential mit $V_0 = 0$: $y = 2x^2 \Rightarrow \mathbf{F}(x, 2x^2) = (4x^3, -x^2) = x^2(4x, -1) \Rightarrow$ Feldvektoren zeigen unten nach rechts (falls $x > 0$) oder unten nach links (falls $x < 0$). An der y -Achse: $x = 0 \Rightarrow \mathbf{F}(0, y) = (0, -y) \Rightarrow$ Feldvektoren zeigen auf den Ursprung.

Siehe rechte Skizze oben.

Bitte wenden für Feldlinien.

