Universität Karlsruhe — Wintersemester 2003/04
Institut für Theorie der Kondensierten Materie — 21.11.03
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell — http://www-tkm.physik.uni-karlsruhe.de/lehre/
Sprechstunde: Fr 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14 — howell@tkm.physik.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 6 zur Theorie A

Klausurtermin

Mittwoch, 4.2.2004, 15:30–17:30 in Gaede- und Gerthsen-Hörsälen
(weitere Informationen folgen)
Es werden keinerlei Hilfsmittel erlaubt!

$\boxed{1}$ Differentialgleichung

Gegeben sei die Differentialgleichung $y'(x) = -x\,y(x)$. Zeichnen Sie zunächst das Richtungsfeld der DGL und skizzieren Sie die Lösung mit $y(0) = 2$. Berechnen Sie die Lösung durch "Trennung der Veränderlichen": bringen Sie die DGL auf die Form $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$, integrieren Sie dann diese Gleichung (Integrationskonstante!) und lösen Sie nach $y = y(x)$ auf. Geben Sie sowohl die allgemeine Lösung, als auch die Lösung mit $y(0) = 2$ an.

$\boxed{2}$ Abkühlung von Milchkaffee

Ein Student bereitet sich einen Milchkaffee vor und möchte, dass er möglichst schnell kühl genug zum Trinken wird. Soll er sofort die Milch zum Kaffee geben und dann die Zeit t warten, oder ihn zunächst für die Zeit t abkühlen lassen und dann die Milch dazu geben?

Hinweis: Ein Körper mit Masse m und spezifischer Wärme c hat bei Temperatur T eine Wärmeenergie $W = mcT$. Seien T_1 die Anfangstemperatur des (schwarzen) Kaffees, T_0 die konstante Temperatur der Umgebung ($T_0 < T_1$), m_K die Masse des Kaffees und m_M die Masse der Milch. Nehmen Sie an, dass die Milch ursprünglich bei Temperatur T_0 ist, und dass die spezifische Wärme von Milch gleich der von Kaffee ist. Die Energieverlustrate $-\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ eines Körpers zur Umgebung ist proportional zum Temperaturunterschied zwischen dem Körper und der Umgebung; Sie können annehmen, dass die Proportionalitätskonstante κ in den beiden Fällen die gleiche ist (warum?).

(a) Stellen Sie zunächst die allgemeine DGL für die Temperatur des Kaffees auf und zeigen Sie, dass die Lösung mit $T(t{=}0) = T'$ in der Form

$$T(t) = T_0 + (T' - T_0)\,\mathrm{e}^{-\frac{\kappa t}{mc}}$$

geschrieben werden kann.

(b) Setzen Sie die jeweiligen Anfangsbedingungen ein, um zwei Ausdrücke für die Temperatur des Milchkaffees als Funktion der Zeit zu bekommen. Beraten Sie nun den Studenten.

$\boxed{3}$ Schiefer Wurf mit Reibung

Für kleine Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}$ ist die Reibungskraft proportional zur Geschwindigekeit und in die entgegengesetzte Richtung: $\boldsymbol{F}_{\text{Reibung}} = -m\gamma\boldsymbol{v}$, $\gamma =$ konst, wobei m die Masse des Körpers ist.

(a) Eine Masse m wird mit Geschwindigkeit v_0 vertikal hochgeworfen. Stellen Sie eine DGL für die Geschwindigkeit $v(t)$ unter Einfluss der Schwerkraft mg und der Luftreibung auf und geben Sie die Lösung an (siehe Vorlesung). Was ist die Endgeschwindigkeit $v_{\text{End}} = \lim_{t\to\infty} v(t)$? Was ist $v(t)$ im Grenzfall $\gamma \to 0$?

Integrieren Sie $v(t)$, um die Höhe $z(t)$ zu bestimmen (nehmen Sie $z(0) = 0$ an).

Zwei Körper werden von einem Heißluftballon runtergeworfen, einer mit $v_0 = v_{\text{End}}$ und der andere mit $v_0 = 0$. Was ist der Abstand zwischen ihnen nach langer Zeit ($t \to \infty$) ?

(b) Ein Leichtathlet steht am Rand einer Klippe und wirft eine Kugel in der x-z-Ebene mit Geschwindigkeit $|\boldsymbol{v}_0| = v_0$ und Winkel α gegen die Erdoberfläche. Geben Sie die DGL für $v_x(t)$ und $v_z(t)$ und (mit Hilfe der Lösung aus **(a)** bzw. der Vorlesung) die Ergebnisse für $x(t)$ und $z(t)$ an. (Wählen Sie den Nullpunkt des Koordinatensystems beim Athlet.)

Berechnen Sie $x(t)$ und $z(t)$ für kurze Zeiten ($t \to 0$) und lange Zeiten ($t \to \infty$), und skizzieren Sie $x(t)$ und $z(t)$ anhand dieser Ergebnisse.

(c) Berechnen Sie die Bahnkurve $z(x)$, indem Sie $x(t)$ nach t auflösen und das Ergebnis in $z(t)$ einsetzen.

Berechnen Sie die erste Korrektur $\sim\gamma$ zum reibungsfreien Grenzall.
NB: $\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

Skizzieren Sie $z(x)$ im Falle $\alpha = 0$ mit und ohne Reibung (im selben Diagramm).

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Freitag, den 28.11.03 —