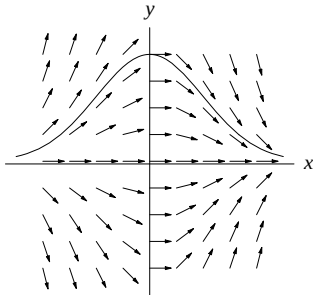


Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 6 zur Theorie A

1 Differentialgleichungen

Richtungsfeld und Form der Lösung: Siehe Skizze.



$$y'(x) \equiv \frac{dy}{dx} = -xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int x dx \\ \Rightarrow \ln y = -\frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow y(x) = e^{-x^2/2+c} \equiv A e^{-x^2/2}$$

A, c sind Integrationskonstanten ($A = e^c$). Bestimmte Lösung:

$$y(x=0) = 2 \Rightarrow 2 = A e^0 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y(x) = 2 e^{-x^2/2}$$

2 Abkühlung von Milchkaffee

- (a) Die zeitliche Änderung der Wärmeenergie W eines Körpers ist proportional zum Temperaturunterschied mit der Umgebung:

$$\frac{dW}{dt} = -\kappa(T - T_0) \Rightarrow mc \frac{dT}{dt} = -\kappa(T - T_0)$$

Minuszeichen: W nimmt ab falls $T > T_0 \Rightarrow$ der Körper kühlt ab.

$\kappa > 0$ ist die Proportionalitätskonstante. *Merke:* Ein Becher Flüssigkeit kühlt hauptsächlich durch Verdunstung ab, die von der Größe der Oberfläche abhängt. Diese bleibt unverändert, wenn man Milch zum Kaffee zugibt.

Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dT}{T - T_0} = -\frac{\kappa dt}{mc} \Rightarrow \int \frac{dT}{T - T_0} = - \int \frac{\kappa dt}{mc} \\ \Rightarrow \ln(T - T_0) = -\frac{\kappa t}{mc} + A \Rightarrow T - T_0 = e^{-\frac{\kappa t}{mc} + A} \equiv B e^{-\frac{\kappa t}{mc}} \\ \Rightarrow T(t) = T_0 + B e^{-\frac{\kappa t}{mc}}$$

Integrationskonstante B bestimmen: Sei $T(t=0) = T'$

$$\Rightarrow T' = T_0 + B \Rightarrow B = T' - T_0 \Rightarrow T(t) = T_0 + (T' - T_0) e^{-\frac{\kappa t}{mc}}$$

- (b) • Zuerst Milch zum Kaffee geben:
 Eine Mischung von M_K schwarzem Kaffee mit Temperatur T_1 und M_M Milch mit Temperatur T_0 ergibt eine Menge $m = M_K + M_M$ Milchkaffee mit Temperatur T' . T' durch Erhaltung der Wärmeenergie bestimmen:

$$(M_K + M_M)cT' = M_K cT_1 + M_M cT_0 \Rightarrow T' = \frac{M_K T_1 + M_M T_0}{M_K + M_M}$$

Abkühlung des Milchkaffees:

$$T_{MK}(t) = T_0 + \left(\frac{M_K T_1 + M_M T_0}{M_K + M_M} - T_0 \right) e^{-\frac{\kappa t}{(M_M + M_K)c}} \\ = T_0 + \frac{M_K(T_1 - T_0)}{M_K + M_M} e^{-\frac{\kappa t}{(M_M + M_K)c}} \quad (1)$$

- Zuerst abkühlen lassen:

M_K Kaffee mit Temperatur $T_1 \Rightarrow$ nach Zeit t hat der schwarze Kaffee die Temperatur $T_{sK}(t) = T_0 + (T_1 - T_0) e^{-\frac{\kappa t}{M_K c}}$
 Jetzt M_M Milch mit Temperatur T_0 dazu geben; die Temperatur des Milchkaffees ist

$$T_{MK}(t) = \frac{M_K T_{sK}(t) + M_M T_0}{M_K + M_M} = \frac{1}{M_M + M_K} \left[M_K \left(T_0 + (T_1 - T_0) e^{-\frac{\kappa t}{M_K c}} \right) + M_M T_0 \right] \\ = T_0 + \frac{M_K(T_1 - T_0)}{M_K + M_M} e^{-\frac{\kappa t}{M_K c}} \quad (2)$$

Die Ausdrücke (1) und (2) sind identisch bis auf den Nenner im Exponenten, der in (1) größer ist als in (2), $-\frac{\kappa t}{(M_M + M_K)c} > -\frac{\kappa t}{M_K c}$, also ist die e-Funktion größer ($x > y \Leftrightarrow e^x > e^y$). Für feste t ist daher (1) größer als (2), also kühlt der Milchkaffee schneller auf eine gewünschte Temperatur ab, wenn man erst zum Schluss die Milch zum Kaffee gibt.

3 Schiefer Wurf mit Reibung

- (a) Kräfte: $\mathbf{F}_{\text{Reibung}} = -m\gamma\mathbf{r}$, $\mathbf{F}_{\text{Schwerkraft}} = -mg\hat{\mathbf{z}}$.

$$m\dot{v}_z = \sum F \Rightarrow m \frac{dv_z}{dt} = -mg - m\gamma v_z \Rightarrow \int \frac{dv_z}{g + \gamma v_z} = - \int dt \\ \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \ln(g + \gamma v_z) = -t + A \Rightarrow v_z(t) = \frac{1}{\gamma} (-g + B e^{-\gamma t})$$

Integrationskonstante B durch Anfangsbedingungen bestimmen:

$$v_z(0) = v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{1}{\gamma} (-g + B) \Rightarrow v_z(t) = -\frac{g}{\gamma} + \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \right) e^{-\gamma t}$$

Für $t \rightarrow \infty$ fällt der Körper mit konstanter Geschwindigkeit $v_{\text{End}} = \lim_{t \rightarrow \infty} v_z(t) = -\frac{g}{\gamma}$.

Grenzfall $\gamma \rightarrow 0$:

$$v_z(t) = \frac{g}{\gamma} (-1 + e^{-\gamma t}) + v_0 e^{-\gamma t} = \frac{g}{\gamma} [-1 + (1 - \gamma t + \dots)] + v_0 (1 + \dots) = v_0 - gt$$

Integrieren:

$$z(t) = \int v_z(t) dt = -\frac{gt}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \right) e^{-\gamma t} + c \quad \text{Mit } z(0) = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \right)$$

$$\Rightarrow z(t) = -\frac{gt}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \right) (e^{-\gamma t} - 1) \quad (3)$$

Körper 1: $v_0 = 0 \Rightarrow$ für große Zeiten $z_1(t) = -\frac{gt}{\gamma} - \frac{g}{\gamma^2} (e^{-\gamma t} - 1) \simeq -\frac{gt}{\gamma} + \frac{g}{\gamma^2}$

Körper 2: $v_0 = v_{\text{End}} = -\frac{g}{\gamma} \Rightarrow$ für große Zeiten $z_2(t) = -\frac{gt}{\gamma}$

Abstand zwischen den beiden ist $g/\gamma^2 = \text{konst.}$

(b)

$$m\dot{v}_z = \sum F = -mg - m\gamma v_z \quad \text{Anfangsbedingung: } v_z(t=0) = v_{0z} \equiv v_0 \sin \alpha$$

$$m\dot{v}_x = \sum F = -m\gamma v_x \quad \text{Anfangsbedingung: } v_x(t=0) = v_{0x} \equiv v_0 \cos \alpha$$

Die Lösung für $z(t)$ ist durch (3) mit $v_0 \rightarrow v_{0z}$ gegeben. Die DGL für $v_x(t)$ ist identisch zu der für $v_z(t)$ mit $g = 0$, also setze $g \rightarrow 0$ und $v_0 \rightarrow v_{0x}$ in (3):

$$x(t) = -\frac{v_{0x}}{\gamma} (e^{-\gamma t} - 1) \quad (4)$$

Kleine Zeiten ($t \rightarrow 0$):

$$x(t) = -\frac{v_{0x}}{\gamma} (e^{-\gamma t} - 1) = -\frac{v_{0x}}{\gamma} [(1 - \gamma t + \dots) - 1] = v_{0x} t$$

$$z(t) = -\frac{gt}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \right) (e^{-\gamma t} - 1)$$

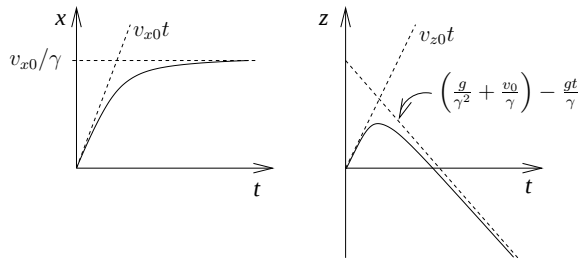
$$= -\frac{gt}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \right) [(1 - \gamma t + \dots) - 1]$$

$$= -\frac{gt}{\gamma} + t \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \right) = v_{z0} t$$

Große Zeiten ($t \rightarrow \infty \Rightarrow e^{-\gamma t} \ll 1$):

$$x(t) = -\frac{v_{0x}}{\gamma} (e^{-\gamma t} - 1) \simeq \frac{v_{0x}}{\gamma} = \text{konst.} \quad (5)$$

$$z(t) = -\frac{gt}{\gamma} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \right) (e^{-\gamma t} - 1) \simeq \frac{1}{\gamma} \left(\frac{g}{\gamma} + v_0 \right) - \frac{gt}{\gamma} \quad (6)$$



(c)

$$x(t) = -\frac{v_{0x}}{\gamma} (e^{-\gamma t} - 1) \Rightarrow e^{-\gamma t} = 1 - \frac{\gamma x}{v_{0x}} \Rightarrow -\gamma t = \ln \left(1 - \frac{\gamma x}{v_{0x}} \right)$$

$$\Rightarrow t = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma x}{v_{0x}} \right) \quad \text{und} \quad (1 - e^{-\gamma t}) = \frac{\gamma x}{v_{0x}}$$

Einsetzen in (3):

$$z(x) = \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma x}{v_{0x}} \right) + \left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0} \right) \frac{x}{v_{x0}} \quad (7)$$

Kleines γ (genauer gesagt bei Annahme von $\frac{\gamma x}{v_{0x}} \ll 1$; die Entwicklung gilt nicht, wenn x zu groß ist):

$$z(x) = \frac{g}{\gamma^2} \left[-\frac{\gamma x}{v_{0x}} - \frac{1}{2} \left(-\frac{\gamma x}{v_{0x}} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{\gamma x}{v_{0x}} \right)^3 + \dots \right] + \left(\frac{g}{\gamma} + v_{z0} \right) \frac{x}{v_{x0}}$$

$$= -\frac{gx^2}{2v_{0x}^2} - \gamma \frac{gx^3}{3v_{0x}^3} + \frac{v_{z0}}{v_{x0}} x = \underbrace{x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}}_{\text{reibungsfreier Grenzfall}} - \underbrace{\gamma \frac{gx^3}{3v_0^3 \cos^3 \alpha}}_{\text{1. Korrektur}}$$

In der Anwesenheit von Reibung ist die Kugel immer niedriger als in ihrer Abwesenheit.

$\alpha = 0$:

Für kleines x ist $z(x) \simeq -\frac{gx^2}{2v_0^2} - \gamma \frac{gx^3}{3v_0^3}$

Aus (5), (6) folgen $x \rightarrow v_0/\gamma$ und $z \rightarrow -\infty$ (sieht man auch, wenn man $x \rightarrow v_0/\gamma$ in (7) einsetzt).

