

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 7 zur Theorie A

1 Harmonischer Oszillator I

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos(\omega_0 t - \phi_1) = A_1 \cos \omega_0 t \cos \phi_1 + A_1 \sin \omega_0 t \sin \phi_1 \\ &\equiv A_2 \sin(\omega_0 t - \phi_2) = A_2 \sin \omega_0 t \cos \phi_2 - A_2 \cos \omega_0 t \sin \phi_2 \\ &\equiv C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

Koeffizienten von $\cos \omega_0 t$ bzw. $\sin \omega_0 t$ vergleichen:

$$C_1 = A_1 \cos \phi_1 = -A_2 \sin \phi_2 \quad (1)$$

$$C_2 = A_1 \sin \phi_1 = A_2 \cos \phi_2 \quad (2)$$

(2) durch (1) dividieren:

$$\frac{C_2}{C_1} = \tan \phi_1 = -\cot \phi_2$$

$$\text{Nun } \tan(\phi_2 + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\phi_2 + \frac{\pi}{2})}{\cos(\phi_2 + \frac{\pi}{2})} = \frac{\sin \phi_2 \cos \frac{\pi}{2} + \cos \phi_2 \sin \frac{\pi}{2}}{\cos \phi_2 \cos \frac{\pi}{2} - \sin \phi_2 \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{\cos \phi_2}{-\sin \phi_2} = -\cot \phi_2$$

$$\Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = \tan \phi_1 = -\cot \phi_2 = \tan(\phi_2 + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \boxed{\phi_1 = \phi_2 + \frac{\pi}{2}} \quad (3)$$

(3) in (2) einsetzen:

$$A_1 \sin \phi_1 = A_2 \cos(\phi_1 - \frac{\pi}{2}) = A_2 \cos \phi_1 \cos \frac{\pi}{2} + A_2 \sin \phi_1 \sin \frac{\pi}{2} = A_2 \sin \phi_1 \Rightarrow \boxed{A_1 = A_2} \quad (4)$$

Gleichungen (1)–(4) sind die gesuchten Zusammenhänge.

Merke: Wenn man (1) durch (2) dividiert, bekommt man $\phi_1 = \phi_2 - \frac{\pi}{2}$ und $A_1 = -A_2$, die zusammen äquivalent zu (3), (4) sind.

2 Harmonischer Oszillator II

(a) Newton'sches Gesetz für die Kräfte:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F = -m\omega_0^2 x + F(t) \\ \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x &= f_0 \Theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{mit } f_0 = \frac{F_0}{m} \end{aligned} \quad (5)$$

Wir brauchen eine partikuläre Lösung zu (5), die überall stetig ist und deren erste Ableitung stetig ist. Um eine zu finden, suchen wir zunächst die allgemeine Lösung jeweils für $t < 0$ und für $t > 0$, und dann wählen wir die Integrationskonstanten so, dass die Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind.

- Für $t < 0$ hat die DGL die Form der homogenen DGL, also

$$x_{p-}(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (6)$$

- Für $t > 0$ hat die DGL die Form $\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0$. Um die allgemeine Lösung hierzu zu finden, brauchen wir zuerst die partikuläre Lösung. Ein Ansatz dafür ist, $x(t)$ so zu wählen, dass es dieselbe Form wie die rechte Seite hat; hier ist die rechte Seite konstant, als wählen wir $x(t) = c = \text{konst.}$ Einsetzen:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \Rightarrow 0 + \omega_0^2 c = f_0 \Rightarrow c = \frac{f_0}{\omega_0^2}$$

Die allgemeine Lösung für $t > 0$ ergibt sich aus der Summe der homogenen Lösung und der partikulären Lösung:

$$x_{p+}(t) = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad (7)$$

Die Stetigkeitsbedingungen müssen überall erfüllt werden, insbesondere bei $t = 0$, wo $x_{p-}(t)$ in $x_{p+}(t)$ und $\dot{x}_{p-}(t)$ in $\dot{x}_{p+}(t)$ übergehen. Diese Forderung bestimmt einen Zusammenhang zwischen A, B und C, D .

Um die allgemeine Lösung der DGL (5) zu erhalten, muss nur eine partikuläre Lösung bekannt sein, also wählen wir

$$x_p(t=0) = 0, \quad \dot{x}_p(t=0) = 0 \quad (8)$$

Stetigkeitsbedingungen:

$$\begin{aligned} x_{p-}(0^-) &= x_{p+}(0^+) = 0 \quad \text{mit} \quad x_{p-}(0^-) = A \quad \text{und} \quad x_{p+}(0^+) = C + f_0/\omega_0^2 \\ \dot{x}_{p-}(0^-) &= \dot{x}_{p+}(0^+) = 0 \quad \text{mit} \quad \dot{x}_{p-}(0^-) = B\omega_0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_{p+}(0^+) = D\omega_0 \\ \Rightarrow A &= 0, \quad B = 0, \quad C = -f_0/\omega_0^2, \quad D = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Aus (6), (7), (9) ergibt sich die partikuläre Lösung zu (5):

$$x_p(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{f_0}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) & \text{für } t > 0 \end{cases} \Rightarrow x_p(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) \Theta(t)$$

Allgemeine Lösung zur homogenen Gleichung:

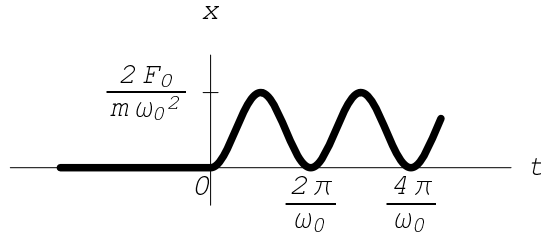
$$x_{\text{allg}}(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung zur inhomogenen Bewegungsgleichung:

$$\boxed{x(t) = x_{\text{allg}}(t) + x_p(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) \Theta(t)}$$

- (b) Für $t < 0$ sollen $x(t) = 0$ und $\dot{x}(t) = 0$ sein $\Rightarrow C_1 = C_2 = 0$, also

$$\boxed{x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \Theta(t)(1 - \cos \omega_0 t) \quad \text{mit } f_0 = F_0/m} \quad (10)$$



Physikalisches Beispiel: Eine Feder hängt in ihrer Ruheposition mit dem unteren Ende bei $x = 0$. Zu $t = 0$ wird eine Masse ans Ende gehängt, so dass die Ruheposition jetzt tiefer liegt (bei $x = F_0/\omega_0^2$). Da der harmonische Oszillator sich weg von der neuen Ruheposition befindet, fängt er an zu oszillieren.

Merke zu den Kontinuitätsbedingungen:

Berechne explizit aus (10) $x(t)$ und seine Ableitungen bei $t = 0$ für beide Limites.

$$x_-(t) = 0 \Rightarrow x(0^-) = 0, \dot{x}(0^-) = 0, \ddot{x}(0^-) = 0$$

$$x_+(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t) \Rightarrow x_+(0^+) = 0$$

$$\dot{x}_+(t) = \frac{f_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \Rightarrow \dot{x}_+(0^+) = 0$$

$$\ddot{x}_+(t) = f_0 \cos \omega_0 t \Rightarrow \ddot{x}_+(0^+) = f_0$$

Offensichtlich sind $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ kontinuierlich bei $t = 0$, während $\ddot{x}(t)$ einen Sprung enthält. Schauen wir die DGL (5) an, sehen wir, dass die rechte Seite einen Sprung enthält, also muss die linke Seite auch einen enthalten, und zwar in $\ddot{x}$. Physikalisch muss x immer kontinuierlich sein, da ein Körper nicht plötzlich verschwinden kann, um instantan an einem anderen Ort wieder aufzutauchen.

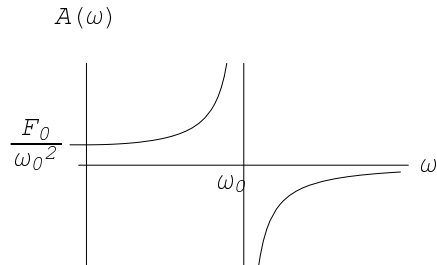
3 Harmonischer Oszillator III

- (a) Ansatz $x_p(t) = A \cos(\omega t - \phi)$ in die Bewegungsgleichung einsetzen (schreibe $f_0 = F_0/m$ wie in Aufgabe 2a):

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \Rightarrow -A\omega^2 \cos(\omega t - \phi) + A\omega_0^2 \cos(\omega t - \phi) = f_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t - \phi) = f_0 \cos \omega t \Rightarrow \boxed{A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \phi = 0}$$

ϕ ist unabhängig von der Erregerfrequenz ω . Die Amplitude A divergiert wenn $\omega = \omega_0$.



- (b) Allgemeine Lösung: Summe der allgemeinen Lösung zur homogenen Gleichung und der partikulären Lösung.

$$x(t) = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$$

C, D bestimmen durch Einsetzen der Randbedingungen:

$$x(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$v(t) = -C\omega_0 \sin \omega_0 t + D\omega_0 \cos \omega_0 t - \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \omega \sin \omega t \quad \text{also } v(0) = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)}$$

Umschreiben mit Hilfe von $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$:

$$x(t) = -\frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{(\omega + \omega_0)t}{2} \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2}$$

Für $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ schreibe $\omega = \omega_0 + \delta$, $|\delta| \ll \omega_0$. Es folgt:

$$\omega + \omega_0 = 2\omega_0 + \delta \simeq 2\omega_0, \quad \omega - \omega_0 = \delta$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{2f_0}{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)} \sin \frac{(\omega + \omega_0)t}{2} \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) \simeq \frac{f_0}{\delta \omega_0} \sin \omega_0 t \sin \frac{\delta t}{2}}$$

$\Rightarrow$ Oszillationen an der Frequenz ω_0 mit großer Amplitude $\sim \delta^{-1}$ moduliert von der Einhüllenden $\sin(\delta t/2)$.

