

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 8 zur Theorie A**1 Unterdämpfung****(a)** DGL: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$\text{sei } x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Nun $\gamma < \omega_0$, also definiere $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda = -\gamma \pm i\Omega$ Allgemeine Lösung mit beiden Werten von λ bilden:

$$x(t) = A e^{(-\gamma+i\Omega)t} + B e^{(-\gamma-i\Omega)t} = (A e^{i\Omega t} + B e^{-i\Omega t}) e^{-\gamma t} \equiv C \cos(\Omega t + \phi) e^{-\gamma t}$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

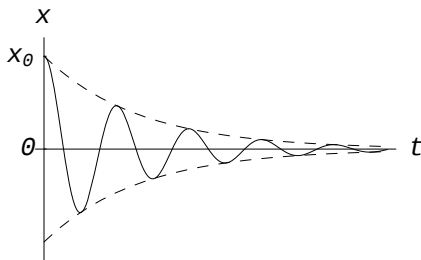
$$x(0) = x_0 \Rightarrow C \cos \phi = x_0 \quad (1)$$

$$x'(t) = -C\Omega \sin(\Omega t + \phi) e^{-\gamma t} - C\gamma \cos(\Omega t + \phi) e^{-\gamma t}$$

$$\text{also } x'(0) = 0 \Rightarrow -C\Omega \sin \phi - C\gamma \cos \phi = 0 \Rightarrow \tan \phi = -\gamma/\Omega \quad (2)$$

(2) in (1) einsetzen und $\sin^2 u + \cos^2 u = 1 \Rightarrow \tan^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}$ benutzen:

$$C = \frac{x_0}{\cos \phi} = x_0 \sqrt{1 + \tan^2 \phi} = x_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\Omega^2}} \Rightarrow x(t) = x_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\Omega^2}} \cos\left(\Omega t - \arctan \frac{\gamma}{\Omega}\right) e^{-\gamma t} \equiv x_0 \left(\cos \Omega t + \frac{\gamma}{\Omega} \sin \Omega t\right) e^{-\gamma t} \quad (3)$$

**(b)** Aus der ersten Darstellung in (3) folgt sofort

$$x(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\Omega} \left[\arctan \frac{\gamma}{\Omega} + \left(\frac{1}{2} + n \right) \pi \right], \quad n \in \mathbb{N}$$

Die erste Nullstelle ($n = 0$) befindet sich bei $t = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \left[\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2/\gamma^2 - 1}} \right) \right]$. $\arctan(\cdot)$ liegt zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, während mit wachsender Reibung sein Vorfaktor monoton von $1/\omega_0$ bis unendlich wächst $\Rightarrow$ die erste Nullstelle bewegt sich von $\frac{\pi}{2}$ bis ∞ .

Der Abstand zwischen den Nullstellen ist $\frac{\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$, also ist er π/ω_0 im reibungs-freien Fall, wächst monoton mit wachsender Reibung und geht gegen unendlich für $\gamma \rightarrow \omega_0$.

2 Kritische Dämpfung**(a)** Aus der Vorlesung:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \gamma^2 x = 0 \Rightarrow x(t) = (At + B) e^{-\gamma t}$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

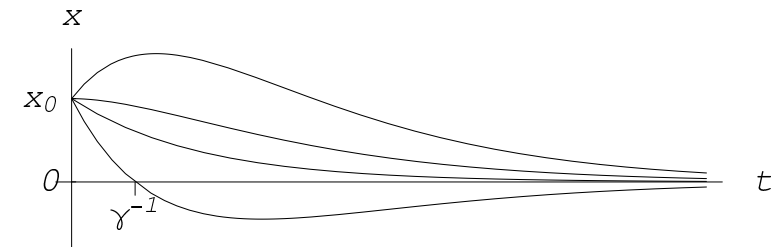
$$x(0) = x_0 \Rightarrow B = x_0$$

$$\dot{x}(t) = A e^{-\gamma t} - \gamma(At + B) e^{-\gamma t} \quad \text{also } \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow A - \gamma B = v_0 \Rightarrow A = v_0 + x_0 \gamma$$

$$\Rightarrow x(t) = [(v_0 + x_0 \gamma)t + x_0] e^{-\gamma t}$$

Kurze Zeiten:

$$x(t) = [(v_0 + x_0 \gamma)t + x_0] (1 - \gamma t + \frac{1}{2} \gamma^2 t^2 + \dots) = x_0 \left[1 + \frac{v_0 t}{x_0} - \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma v_0}{x_0} \right) t^2 + \dots \right]$$

(b) Nullstellen bei $x(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{x_0}{-v_0 - x_0 \gamma}$.Da $t > 0$ ist, gibt es nur eine Lösung falls $v_0 < -x_0 \gamma$. $v_0 > 0$: für kleine Zeiten geht $x(t)$ linear nach oben; keine Nullstellen. $v_0 = 0$: für kleine Zeiten ist $x(t) \simeq x_0(1 - \frac{1}{2} \gamma^2 t^2) \Rightarrow x(t)$ geht parabolisch nach unten; keine Nullstellen. $v_0 = -x_0 \gamma$: $x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \Rightarrow$ exponentieller Zerfall; keine Nullstellen. $v_0 = -2x_0 \gamma$: für kleine Zeiten geht $x(t)$ linear nach unten; Nullstelle bei $t = 1/\gamma$.

Der aperiodische Grenzfall ist so definiert, dass $x(t)$ maximal eine Nullstelle bei endlichem t hat.

3 Energieerhaltung

$$E = E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + V(\mathbf{r}) \quad \text{wobei } \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{v} \left[m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla V(\mathbf{r}) \right]$$

Newton'sches Gesetz: $m \ddot{\mathbf{r}} \equiv m \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}$

Konservatives Kraftfeld: $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$

Einsetzen:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \mathbf{v} [\mathbf{F} + \nabla V(\mathbf{r})] = 0$$

Da die zeitliche Ableitung von E entlang des Pfades $\mathbf{r}(t)$ konstant ist, ist die Energie erhalten.

4* Getriebenes System

(a) Allgemeine Lösung zur homogenen DGL ist schon bekannt:

$$v_{\text{hom}}(t) = A e^{-\gamma t}$$

Partikuläre Lösung: suche eine Lösung zu $\dot{v}(t) + \gamma v(t) = f_0 t$.

Rechte Seite ist linear in t , linke Seite ist linear in v und $\dot{v} \Rightarrow$ Ansatz $v(t) = Bt + C$:

$$\dot{v}(t) + \gamma v(t) = B + \gamma(Bt + C) = f_0 t \Rightarrow \gamma B = f_0, \quad B + \gamma C = 0$$

$$\Rightarrow v_{\text{part}}(t) = \frac{f_0(\gamma t - 1)}{\gamma^2}$$

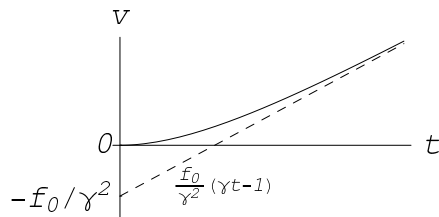
$$\Rightarrow v_{\text{allg}}(t) = v_{\text{hom}}(t) + v_{\text{part}}(t) = A e^{-\gamma t} + \frac{f_0(\gamma t - 1)}{\gamma^2}$$

Anfangsbedingungen einsetzen:

$$v(0) = 0 \Rightarrow A - \frac{f_0}{\gamma^2} = 0 \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{f_0}{\gamma^2} [\gamma t - (1 - e^{-\gamma t})]}$$

Für kurze Zeiten: $v(t) = \frac{f_0}{\gamma^2} [\gamma t - 1 + (1 - \gamma t + \frac{1}{2} \gamma^2 t^2 + \dots)] = \frac{1}{2} f_0 t^2$

Für lange Zeiten: $v(t) \simeq f_0 t / \gamma$



(b) Ansatz $v_{\text{part}}(t) = w(t) e^{-\gamma t}$ in die inhomogene DGL einsetzen:

$$\dot{v}(t) + \gamma v(t) = f(t) \Rightarrow (\dot{w} e^{-\gamma t} - \gamma w e^{-\gamma t}) + \gamma w e^{-\gamma t} = f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dw}{dt} = f e^{\gamma t} \Rightarrow w(t) = \int_0^t f(t') e^{\gamma t'} dt'$$

Allgemeine Lösung zur inhomogenen DGL ist also:

$$v_{\text{allg}}(t) = v_{\text{hom}}(t) + v_{\text{part}}(t) = A e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t f(t') e^{\gamma t'} dt'$$

Anfangsbedingungen: für $t = 0$ gibt es keinen Beitrag vom Integral, also $A = v(0) = v_0$.

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = e^{-\gamma t} \left[v_0 + \int_0^t f(t') e^{\gamma t'} dt' \right]}$$

Wegen des positiven Argumentes der e-Funktion ist das Integral groß im Vergleich zu v_0 (solange $\gamma t \gtrsim 1$) $\Rightarrow$ für größere Zeiten haben die Anfangsbedingungen keinen Einfluss auf das Verhalten des Systems, $v(t)$. Darüber hinaus sorgt die e-Funktion dafür, dass der Hauptbeitrag zum Integral von t' nah an der oberen Grenze kommt, $t' \lesssim t$, also wird das Verhalten des Systems nur von der Form von $f(t)$ in der letzten Zeit beeinflusst. Man spricht von einem System mit einem *endlichen Gedächtnis*.