Universität Karlsruhe — Wintersemester 2003/04
Institut für Theorie der Kondensierten Materie — 12.12.03
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell — http://www-tkm.physik.uni-karlsruhe.de/lehre/
Sprechstunde: Fr 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14 — howell@tkm.physik.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 9 zur Theorie A

$\boxed{1}$ Komplexe Zahlen

(a) Finden Sie alle verschiedene Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Skizzieren Sie deren Lage in der z-Ebene für $n = 3, 4$. *Hinweis:* $\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k} = 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ benutzen.

(b) Benutzen Sie die Formel von de Moivre und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(nu)} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})^n$, um $\cos nu$ und $\sin nu$ als Funktion von $\cos u$ und $\sin u$ für $n = 2, 3$ auszudrücken.

$\boxed{2}$ Relaxationssystem

Gegeben sei das Relaxationssystem

$$\dot{v}(t) + \gamma v(t) = f(t) \ ,$$

das durch die Kraft $f(t) = f_0 \cos \omega t = \mathrm{Re}\, f_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ getrieben wird. Lösen Sie die DGL mit Hilfe des Ansatzes $\tilde{v}(t) = \tilde{A}(\omega)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, $v(t) = \mathrm{Re}\, \tilde{v}(t)$, wobei $\tilde{v}(t)$ die komplexe DGL erfüllt:

$$\dot{\tilde{v}}(t) + \gamma \tilde{v}(t) = f_0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$

Schreiben Sie die Lösung in der Form $v(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \phi(\omega))$ und geben Sie explizit die Amplitude $A(\omega)$ und die Phase $\phi(\omega)$, sowie Real- und Imaginärteil der komplexen Amplitude $\tilde{A}(\omega)$ an. Skizzieren Sie die Funktionen in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz ω.

$\boxed{3}$ Gedämpfter harmonischer Oszillator

Ein gedämpfter harmonischer Oszillator werde durch die Kraft $f(t) = m f_0 \cos \omega t$ periodisch angetrieben, wobei m die Masse des Oszillators ist. Berechnen Sie für die folgenden Größen die Frequenzen ω, an der sie maximal werden, sowie den Wert dieses Maximums, und skizzieren Sie die Funktionen in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz ω:

(a) Amplitude der Auslenkung $x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \phi)$ (siehe Vorlesung).

(b) Amplitude der Geschwindigkeit $v(t) = \dot{x}(t)$.

(c) Mittlere dissipierte Leistung $N(\omega)$, d. h. die vom Erreger geleistete Arbeit pro Periode $T = 2\pi/\omega$:

$$N(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) v(t)\, \mathrm{d}t$$

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Freitag, den 19.12.03 —