Universität Karlsruhe — Wintersemester 2003/04
Institut für Theorie der Kondensierten Materie — 19.12.03
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell — http://www-tkm.physik.uni-karlsruhe.de/lehre/
Sprechstunde: Fr 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14 — howell@tkm.physik.uni-karlsruhe.de

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 9 zur Theorie A

1 Komplexe Zahlen

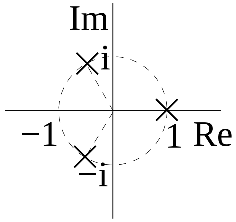
(a)

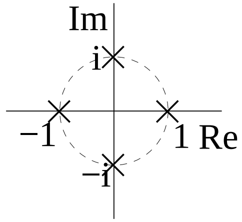
$$z^n = 1 = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k} \;\Rightarrow\; \text{Lösungen sind } z_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} k/n} = \cos\frac{2\pi k}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi k}{n}$$

Nun $z_{k+n} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(n+k)/n} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}k/n} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n} = 1\cdot\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n} = z_k$
$\Rightarrow$ nur die Lösungen $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sind unterschiedlich.

- $n = 3:\quad z_0 = 1\,,\quad z_1 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\quad z_2 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $n = 4:\quad z_0 = 1\,,\quad z_1 = \mathrm{i}\,,\quad z_2 = -1\,,\quad z_3 = -\mathrm{i}$

Merke: Alle Lösungen liegen auf einem Kreis mit Radius 1, da $|z_k| = |\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}k/n}| = 1$.





(b) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(nu)} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}u})^n \;\Rightarrow\; \cos nu + \mathrm{i}\sin nu = (\cos u + \mathrm{i}\sin u)^n$
Rechte Seite ausmultiplizieren; die Real- und Imaginärteile der Gleichung müssen dann unabhängig voneinander erfüllt werden:

- $n = 2:\quad \cos 2u + \mathrm{i}\sin 2u = (\cos u + \mathrm{i}\sin u)^2 = \cos^2 u + 2\mathrm{i}\cos u\sin u + \mathrm{i}^2\sin^2 u$

$$\Rightarrow\; \cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u\,,\quad \sin 2u = 2\sin u\cos u$$

- $n = 3:\quad \cos 3u + \mathrm{i}\sin 3u = \cos^3 u + 3\mathrm{i}\cos^2 u\sin u + 3\mathrm{i}^2\cos u\sin^2 u + \mathrm{i}^3\sin^3 u$

$$\Rightarrow\; \cos 3u = \cos^3 u - 3\cos u\sin^2 u\,,\quad \sin 3u = 3\cos^2 u\sin u - \sin^3 u$$

Merke: Die Beziehungen für $n = 2$ sind sehr nützlich und **man sollte sie auf alle Fälle kennen**. Insbesondere mit Hilfe von $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ bekommt man

$$\boxed{\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1 = 1 - 2\sin^2 u\,,\quad \sin 2u = 2\sin u\cos u}$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}\,,\quad \sin^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}}$$

2 Relaxationssystem

Ansatz $\tilde{v}(t) = \tilde{A}(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ in die komplexe Gleichung einsetzen:

$$\dot{\tilde{v}}(t) + \gamma\tilde{v}(t) = f_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \;\Rightarrow\; -\mathrm{i}\omega\tilde{A}(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \gamma\tilde{A}(\omega)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = f_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$$
$$\Rightarrow\; \tilde{A}(\omega)\,(\gamma - \mathrm{i}\omega) = f_0 \;\Rightarrow\; \tilde{A}(\omega) = \frac{f_0}{\gamma - \mathrm{i}\omega} = \frac{f_0(\gamma + \mathrm{i}\omega)}{(\gamma - \mathrm{i}\omega)(\gamma + \mathrm{i}\omega)} = \frac{f_0(\gamma + \mathrm{i}\omega)}{\gamma^2 + \omega^2}$$
$$\Rightarrow\; \boxed{\mathrm{Re}\;\tilde{A}(\omega) = \frac{f_0\gamma}{\gamma^2+\omega^2}\,,\quad \mathrm{Im}\;\tilde{A}(\omega) = \frac{f_0\,\omega}{\gamma^2+\omega^2}}$$

Schreibe $\tilde{A}(\omega) = A(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}$, wobei

$$A(\omega) = |\tilde{A}(\omega)| = \sqrt{\left[\mathrm{Re}\;\tilde{A}(\omega)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}\;\tilde{A}(\omega)\right]^2} = \frac{f_0}{\gamma^2+\omega^2}\sqrt{\gamma^2+\omega^2} \;\Rightarrow\; \boxed{A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}}$$

$$\phi(\omega) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\;\tilde{A}(\omega)}{\mathrm{Re}\;\tilde{A}(\omega)}\right) \;\Rightarrow\; \boxed{\phi(\omega) = \arctan\frac{\omega}{\gamma}}$$

$$\Rightarrow\; \tilde{v}(t) = \mathrm{Re}\;v(t) = \mathrm{Re}\left[A(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(\omega)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right] = A(\omega)\;\mathrm{Re}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t - \phi(\omega))}$$
$$\Rightarrow\; \boxed{v(t) = \frac{f_0}{\sqrt{\gamma^2+\omega^2}}\cos\left(\omega t - \arctan\frac{\omega}{\gamma}\right)}$$

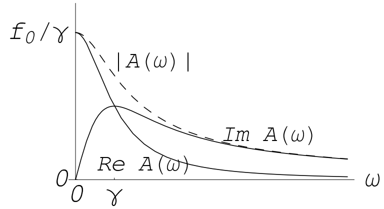
Re $\tilde{A}(\omega)$ und $A(\omega)$ fallen monoton ab.
Im $\tilde{A}(\omega)$ nimmt ein Maximum bei $\omega = \gamma$.

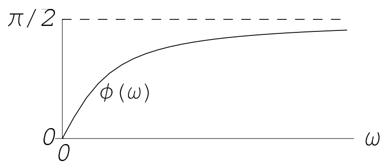
$\phi(\omega)$ wächst monotion von 0 bis $\frac{\pi}{2}$;
die Antwort $v(t)$ liegt immer hinter der treibenden Kraft $f(t)$.

Aus der Definition von $A(\omega)$ folgt
$A(\omega) > \mathrm{Re}\;\tilde{A}(\omega), \mathrm{Im}\;\tilde{A}(\omega)$.

Für $\omega \ll \gamma$ ist Im $\tilde{A}(\omega) \ll$ Re $\tilde{A}(\omega)$
$\Rightarrow\; A(\omega) \simeq \mathrm{Re}\;\tilde{A}(\omega)$

Für $\omega \gg \gamma$ ist Im $\tilde{A}(\omega) \gg$ Re $\tilde{A}(\omega)$
$\Rightarrow\; A(\omega) \simeq \mathrm{Im}\;\tilde{A}(\omega)$





3 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) = f_0\cos\omega t = \mathrm{Re}\;f_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

Der Ansatz $x(t) = \tilde{A}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ mit $\tilde{A}(\omega) \in \mathbb{C}$ liefert (siehe Vorlesung)

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t - \phi(\omega))\,,\; A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}\,,\; \tan\phi(\omega) = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

(a) Die Amplitude ist der Vorfaktor des oszillierenden Teils, d. h. von $\cos(\omega t - \phi(\omega))$.

$$\frac{\mathrm{d}A(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = f_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left\{\left[(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{-1/2}\right\} = \frac{-\frac{1}{2}f_0[4\omega(\omega^2-\omega_0^2) + 8\gamma^2\omega]}{[(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{3/2}}$$

Extrema bei $\frac{\mathrm{d}A(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0$:

$$4\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = 0,\ \pm\omega_1 \text{ mit } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$$

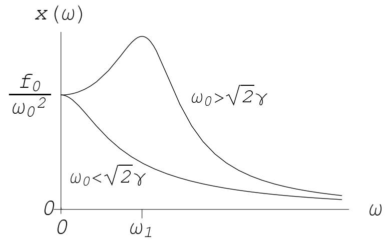
wobei die zweite Lösung nur erlaubt ist falls $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$, da $\omega \in \mathbb{R}$. Einsetzen:

$$A_{\mathrm{Ex}}^{(1)} = A(\omega = 0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}$$

$$A_{\mathrm{Ex}}^{(2)} = A(\omega = \omega_1) = \frac{f_0}{\sqrt{4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}} = \frac{f_0}{\omega_0^2\sqrt{\frac{4\gamma^2}{\omega_0^2}\left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)}} = \frac{f_0}{\omega_0^2\sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}}$$

Nun ist $A(\omega) \geq 0$, und $A(\omega)$ geht gegen null für große ω.

- $\omega_0 < \sqrt{2}\gamma$: Es gibt nur ein Extremum, und zwar bei $\omega = 0$, das ein Maximum sein muss, da $A(0) > 0$ und $\lim_{\omega\to\infty} A(\omega) = 0$.
- $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$: Es gibt zwei Extrema; in $A_{\mathrm{Ex}}^{(2)}$ ist das Argument der Wurzel kleiner 1 $\Rightarrow\ A_{\mathrm{Ex}}^{(2)} > A_{\mathrm{Ex}}^{(1)} > 0 \;\Rightarrow\; \omega = \omega_1$ muss ein Maximum sein und $\omega = 0$ ein Minimum.



(b)

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega A(\omega)\sin(\omega t - \phi(\omega))$$

Die Amplitude ist durch der Vorfaktor gegeben, also $\omega A(\omega)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\Big[\omega A(\omega)\Big] &= A(\omega) + \omega\frac{\mathrm{d}A(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\\
&= \frac{f_0}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}} + \omega\cdot\frac{-\frac{1}{2}f_0[4\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 8\gamma^2\omega]}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{3/2}}\\
&= \frac{f_0}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{3/2}}\Big\{\big[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\big] - \big[2\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\gamma^2\omega^2\big]\Big\}\\
&= \frac{f_0(\omega_0^4 - \omega^4)}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{3/2}}
\end{aligned}$$

Maximum bei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\big[\omega A(\omega)\big] = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = \pm\omega_0}$ Einsetzen:

$$v_{\max} = \omega A(\omega)\Big|_{\omega=\omega_0} = \omega_0\cdot\frac{f_0}{2\gamma\omega_0} = \frac{f_0}{2\gamma}$$

Skizze: Siehe unten.

(c) Mit der Definition von $N(\omega)$ und $T = 2\pi/\omega$

$$\begin{aligned}
N(\omega) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)v(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T}\int_0^T mf_0\cos\omega t\cdot -\omega A(\omega)\sin(\omega t - \phi(\omega))\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{mf_0A(\omega)\omega}{T}\int_0^T \cos\omega t\big(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi\big)\mathrm{d}t\\
&= -\frac{mf_0A(\omega)\omega}{T}\int_0^T \left[\cos\phi\,\frac{\sin 2\omega t}{2} - \sin\phi\,\frac{1 + \cos 2\omega t}{2}\right]\mathrm{d}t\\
&= -\frac{mf_0A(\omega)\omega}{T}\left[\cos\phi\left(\frac{-\cos 2\omega t}{4\omega}\right) - \sin\phi\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}\right)\right]_0^T\\
&= \frac{mf_0A(\omega)\omega}{T}\cdot\frac{T\sin\phi}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{N(\omega) = \frac{1}{2}mf_0A(\omega)\omega\sin\phi}$$

Aus der Vorlesung kennen wir $\tan\phi$, also

$$\sin\phi^2 + \cos\phi^2 = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{\sin^2\phi} = 1 + \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi}$$

$$\Rightarrow\; \sin\phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\phi}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)^2}} = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

Einsetzen: $\Rightarrow\; N(\omega) = \frac{1}{2}mf_0A(\omega)\omega\,\sin\phi$

$$= \frac{1}{2}mf_0\omega\,\frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}\,\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\Rightarrow\; \boxed{N(\omega) = \frac{mf_0^2\gamma\,\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

Suche Extrema von $N(\omega)$:

$$\frac{\mathrm{d}N(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]\cdot 2\omega - \omega^2\cdot[4\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 8\gamma^2\omega]}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^2} = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{2\omega[\omega_0^4 - \omega^4]}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^2} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = 0, \pm\omega_0}$$

Aber für kleine ω (d. h. $\omega \ll \omega_0$) gilt $N(\omega) \simeq mf_0^2\gamma\omega^2/\omega_0^4$, also nimmt $N(\omega)$ offensichtlich ein Minimum bei $\omega = 0$ und daher ist $\omega = \omega_0$ ein Maximum.

$$N_{\max} = N(\omega = \omega_0) = mf_0^2/4\gamma$$