Universität Karlsruhe — Wintersemester 2003/04
Institut für Theorie der Kondensierten Materie — 19.12.03
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell — http://www-tkm.physik.uni-karlsruhe.de/lehre/
Sprechstunde: Fr 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14 — howell@tkm.physik.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 10 zur Theorie A

Das Beratungstutorium am Dienstag, 23.12.03 fällt aus!

1 Teilchen im Potential

Ein Teilchen bewege sich auf der x-Achse im Potential $V(x) = x^4 + 2\lambda x^2 + 1$.
Skizzieren Sie $V(x)$ für die beiden Fälle $\lambda = \pm 1$. Berechnen und skizzieren Sie die Kraft $F(x) = -V'(x)$. Für welche x ist $F(x) = 0$?
Das Teilchen wird bei $x = x_0$ und $v = 0$ losgelassen. Diskutieren Sie *qualitativ* für $\lambda = \pm 1$ und $x_0 = \frac{1}{2}, 1, 2$, welche Bewegungen das Teilchen aufführt.
Hinweis: Der Energieerhaltungssatz reicht; Sie müssen die Bewegungsgleichung nicht lösen.

2 Anharmonischer Oszillator

Wir betrachten einen Oszillator mit einem anharmonischen Anteil:

$$\ddot{x} + \omega_0^2(x + \alpha x^3) = 0\,, \quad 0 < \alpha \ll 1\,, \quad x(0) = A,\ \dot{x}(0) = 0\,. \tag{1}$$

Diese DGL ist nicht exakt analytisch lösbar und man muss Näherungsmethoden benutzen.

(a) Fassen Sie zusammen, was Sie in der Vorlesung über das Lösen von DGLs gelernt haben (partikuläre Lösung, homogene Lösung, typische Ansätze und die Rechtfertigung dafür, Randbedingungen...). Im folgenden wird eine neue approximative Methode eingeführt.

(b) Da $\alpha \ll 1$ ist es naheliegend, einen Reihenentwicklungsansatz für $x(t)$ zu machen: $x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \cdots$, wobei die Terme $\alpha^n x_n(t)$ als kleine Korrekturen betrachtet werden, $\alpha^{n+1}x_{n+1}(t) \ll \alpha^n x_n(t)$.
Wenn $\alpha = 0$, löst $x_0(t)$ die DGL (1) exakt. Bestimmen Sie $x_0(t)$.
Für kleines α setzt man den Ansatz ein und gruppiert systematisch nach Potenzen von α; man verlangt dann, dass die Koeffizienten von α^n unabhängig voneinander verschwinden. Zeigen Sie, dass die erste Korrektur $\sim\alpha$ durch $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{1}{4}A\omega_0^2(\cos 3\omega_0 t + 3\cos\omega_0 t)$ bestimmt wird. *Hinweis:* Ergebnisse aus Aufgabe 1(a), Blatt 9 benutzen.

(c) Finden Sie die partikuläre Lösung zur DGL für $x_1(t)$ mit Hilfe des komplexen Ansatzes $x_1^{\text{part}}(t) = at\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + b\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\omega_0 t}$, $a, b \in \mathbb{C}$. Wie lautet die allgemeine Lösung? Überzeugen Sie sich, dass die Randbedingungen $x_1(0) = 0$, $\dot{x}_1(0) = 0$ lauten, und geben Sie die zugehörige Lösung für $x_1(t)$ an.

(d)* Wie lautet nun die approximative Lösung zu (1)? Für welche Werte von t ist sie gültig? Welche Form nimmt die bestimmende Gleichung für $x_2(t)$? Können Sie raten, welche Frequenzen in $x_2(t)$ vorkommen?

3 Delta-Funktion

Berechnen Sie die Integrale $I_1 = \int_a^b \left[\delta(x+2)x^2 + \delta(x-\frac{1}{2})2x\right] \mathrm{d}x$ und $I_2 = \int_a^b \delta(x^2-4)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, wenn die Limites (a, b) die folgenden Werte nehmen: $(-\infty, \infty), (-5, 0), (-1, 1)$.

*=Bonusaufgabe

— Besprechung in den Übungsgruppen am Freitag, den 09.01.04 —