

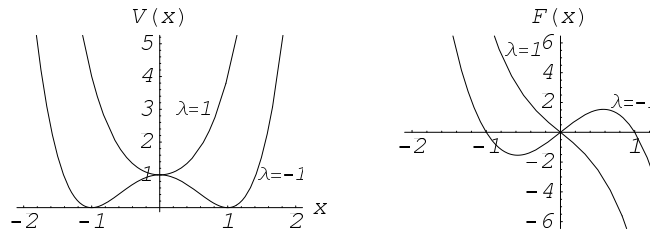
Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 10 zur Theorie A

1 Teilchen im Potential

$$V(x) = x^4 + 2\lambda x^2 + 1 \Rightarrow F(x) = -V'(x) = -4x^3 - 4\lambda x = -4x(x^2 + \lambda)$$

$$F(x) = 0 \text{ bei } x = 0, \pm\sqrt{-\lambda}$$

Die zweite Lösung ist nur relevant falls $\lambda < 0$.



Newton: $m\ddot{x} = F(x)$ also wenn $F > 0$, wird das Teilchen nach rechts beschleunigt.

Wenn das Teilchen mit Geschwindigkeit $v = 0$ losgelassen wird, erreicht es aufgrund der Energieerhaltung den Punkt auf “der anderen Seite” der Mulde mit derselben potentiellen Energie.

$\lambda = 1$, alle x_0 : es schwingt zwischen $-x_0$ und x_0 .

$\lambda = -1$, $x_0 = 2$: es schwingt zwischen -2 und 2 .

$\lambda = -1$, $x_0 = 1$: die wirkende Kraft ist null, also bleibt es bei $x = 1$ im Minimum des Potentials.

$\lambda = -1$, $x_0 = \frac{1}{2}$: es bleibt in der rechten Mulde, da es zu wenig Energie hat, um über die Barriere bei $x = 0$ zu kommen.

Suche x_1 mit $V(x_1) = V(x_0) = \frac{9}{16} \Rightarrow x_1^4 + 2x_1^2 + 1 = \frac{9}{16} \Rightarrow x_1 = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow$ es schwingt zwischen $x_0 = \frac{1}{2}$ und $x_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} \simeq 1.32$.

2 Anharmonischer Oszillator

(a) Nichtlineare DGL erster Ordnung:

$$f(y'(x), y(x)) = g(x)$$

Falls $g(x) = 0$ ist die DGL homogen, sonst inhomogen. Lösen durch Trennung der Veränderlichen: umschreiben als

$$f_1(y) dy = f_2(x) dx$$

und dann beide Seiten integrieren.

Lineare DGL zweiter Ordnung:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x)$$

Falls $g(x) = 0$ ist die DGL homogen, sonst inhomogen. Die homogene Lösung $y_{\text{homo}}(x)$ ist die Lösung zur DGL mit $g(x) \rightarrow 0$ gesetzt, und die partikuläre Lösung $y_{\text{part}}(x)$ ist eine Lösung zur DGL mit $g(x)$ auf der rechten Seite. Die Summe der beiden liefert die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL. Beweis:

$$y''_{\text{homo}}(x) + ay'_{\text{homo}}(x) + by_{\text{homo}}(x) = 0$$

$$y''_{\text{part}}(x) + ay'_{\text{part}}(x) + by_{\text{part}}(x) = g(x)$$

$y(x) = y_{\text{homo}}(x) + y_{\text{part}}(x)$ in die DGL einsetzen:

$$\begin{aligned} y''(x) + ay'(x) + by(x) &= y''_{\text{homo}}(x) + y''_{\text{part}}(x) + a[y'_{\text{homo}}(x) + y'_{\text{part}}(x)] + b[y_{\text{homo}}(x) + y_{\text{part}}(x)] \\ &= [y''_{\text{homo}}(x) + ay'_{\text{homo}}(x) + by_{\text{homo}}(x)] + [y''_{\text{part}}(x) + ay'_{\text{part}}(x) + by_{\text{part}}(x)] \\ &= 0 + g(x) \\ &= g(x) \quad \checkmark \end{aligned}$$

Für eine lineare DGL mit konstanten Koeffizienten kann man immer den exponentiellen Ansatz für die homogene Lösung machen: $y_{\text{homo}}(x) = e^{\lambda x}$. Dieses liefert zwei Lösungen λ_1, λ_2 und die homogene Lösung ist die Summe der beiden mit unterschiedlichen Vorfaktoren: $y_{\text{homo}}(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$ wobei A, B Integrationskonstanten sind.

Um die partikuläre Lösung zu bekommen, macht man einen Ansatz der verallgemeinerten Form der Funktion $g(x)$ auf der rechten Seite. Beispiele:

$$g(x) = \sin \omega x \Rightarrow y_{\text{part}}(x) = c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x$$

$$g(x) = x \cos \omega x \Rightarrow y_{\text{part}}(x) = (c_1 x + c_2) \sin \omega x + (c_3 x + c_4) \cos \omega x$$

$$g(x) = (x^2 + 3)e^{-2x} \Rightarrow y_{\text{part}}(x) = (c_1 x^2 + c_2 x + c_3)e^{-2x}$$

Einsetzen liefert eine Gleichung, die die Konstanten c_i bestimmt.

Die allgemeine Lösung enthält zwei Konstanten, die von $y_{\text{homo}}(x)$ herkommen und die durch Rand- bzw. Anfangsbedingungen bestimmt werden.

(b) Für $\alpha = 0$ lautet die DGL $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Ansatz mit $\alpha \rightarrow 0$ einsetzen:

$$x(t) = (x_0(t) + \alpha x_1(t) + \alpha^2 x_2(t) + \dots) \Big|_{\alpha=0} = x_0(t)$$

$$\text{Einsetzen: } \ddot{x}_0(t) + \omega_0^2 x_0(t) = 0 \Rightarrow x_0 = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

$$\text{Anfangsbedingungen einsetzen} \Rightarrow \boxed{x_0(t) = A \cos \omega_0 t}$$

$\alpha \neq 0$: Ansatz einsetzen und nach Potenzen von α gruppieren:

$$\begin{aligned} (\ddot{x}_0 + \alpha \ddot{x}_1 + \alpha^2 \ddot{x}_2 + \dots) + \omega_0^2 (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots) + \omega_0^2 \alpha (x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots)^3 &= 0 \\ \Rightarrow (\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0) + \alpha (\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_0^3) + \alpha^2 (\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 3\omega_0^2 x_0^2 x_1) + \dots &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

x_0 ist so gewählt, dass der erste Term verschwindet. Die Terme proportional zu $\alpha^2, \alpha^3, \dots$ sind vernachlässigbar gegen den in α , da $\alpha \ll 1$, also lautet die Gleichung, die die x_1 bestimmt,

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_0^3 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\omega_0^2 x_0^3 = -\omega_0^2 A^3 \cos^3 \omega_0 t$$

Aus Aufgabe 1(a), Blatt 9 wissen wir

$$\begin{aligned}\cos^3 u &= \cos 3u + 3 \cos u \sin^2 u = \cos 3u + 3 \cos u (1 - \cos^2 u) = \cos 3u + 3 \cos u - 3 \cos^3 u \\ &\Rightarrow \cos^3 u = \frac{1}{4} \cos 3u + \frac{3}{4} \cos u \\ &\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{1}{4} \omega_0^2 A^3 (\cos 3\omega_0 t + 3 \cos \omega_0 t)}\end{aligned}\quad (2)$$

(c) Partikuläre Lösung für $x_1(t)$ durch komplexen Ansatz:

$$\begin{aligned}x_1^{\text{part}}(t) &= at e^{i\omega_0 t} + b e^{3i\omega_0 t} \\ \Rightarrow \dot{x}_1^{\text{part}}(t) &= a e^{i\omega_0 t} + i a \omega_0 t e^{i\omega_0 t} + 3ib \omega_0 e^{3i\omega_0 t} \\ \Rightarrow \ddot{x}_1^{\text{part}}(t) &= 2ia \omega_0 e^{i\omega_0 t} - a \omega_0^2 t e^{i\omega_0 t} - 9b \omega_0^2 e^{3i\omega_0 t}\end{aligned}$$

Rechte Seite von (2) in komplexer Form schreiben und Ansatz einsetzen:

$$\begin{aligned}2ia \omega_0 e^{i\omega_0 t} - 8b \omega_0^2 e^{3i\omega_0 t} &= -\frac{1}{4} \omega_0^2 A^3 (e^{3i\omega_0 t} + 3e^{i\omega_0 t}) \\ \Rightarrow a &= \frac{3}{8} i \omega_0 A^3, \quad b = \frac{1}{32} A^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x_1^{\text{part}}(t) &= \text{Re} \left[\frac{3}{8} i \omega_0 A^3 t e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{32} A^3 e^{3i\omega_0 t} \right] \\ &= \text{Re} \left[\frac{3}{8} i \omega_0 A^3 t (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + \frac{1}{32} A^3 (\cos 3\omega_0 t + i \sin 3\omega_0 t) \right] \\ &= A^3 \left(-\frac{3}{8} \omega_0 t \sin \omega_0 t + \frac{1}{32} \cos 3\omega_0 t \right)\end{aligned}\quad (3)$$

Homogene Lösung zu (2): $x_1^{\text{homo}}(t) = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t$.

Allgemeine Lösung zu (2):

$$\boxed{x_1^{\text{allg}}(t) = B \sin \omega_0 t + C \cos \omega_0 t + A^3 \left(-\frac{3}{8} \omega_0 t \sin \omega_0 t + \frac{1}{32} \cos 3\omega_0 t \right)}$$

Die exakte Lösung $x(t)$ wird durch die Reihenentwicklung $x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \dots$ genähert. Im Limes $\alpha \rightarrow 0$ gilt $x(t) = x_0(t)$ und damit hat $x_0(t)$ die gleichen Anfangsbedingungen wie $x(t)$, d. h. $x_0(0) = A$, $\dot{x}_0(0) = 0$. Setzt man die Reihenentwicklung in die Anfangsbedingungen ein und gruppiert man nach Potenzen von α , bekommt man $x_i(0) = 0$, $\dot{x}_i(0) = 0$ für $i \geq 1$.

Die Anfangsbedingungen liefern

$$\begin{aligned}C &= -\frac{1}{32} A^3, \quad B = 0 \\ \Rightarrow \boxed{x_1(t) &= \frac{1}{32} A^3 (\cos 3\omega_0 t - \cos \omega_0 t - 12\omega_0 t \sin \omega_0 t)}\end{aligned}$$

(d)* Die approximative Lösung zur anharmonischen DGL lautet

$$x(t) = x_0(t) + \alpha x_1(t) + \dots = A \cos \omega_0 t + \frac{1}{32} \alpha A^3 (\cos 3\omega_0 t - \cos \omega_0 t - 12\omega_0 t \sin \omega_0 t) + \dots$$

wobei die vernachlässigten Terme $\sim \alpha^2$ oder kleiner sind.

So eine Reihenentwicklung ist nur dann nützlich, wenn die Korrekturen höherer Ordnung immer kleiner sind, also braucht man $\alpha x_1(t) \ll x_0(t)$. Wegen des Terms in $\omega_0 t \sin \omega_0 t$ in $x_1(t)$ heißt das $\alpha A^3 \omega_0 t \ll A \Rightarrow t \ll \frac{1}{\alpha \omega_0 A^2}$. Je kleiner α , desto länger ist die Näherung nützlich.

Die Gleichung für $x_2(t)$ ist durch den Term proportional zu α^2 in (1) gegeben:

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 3\omega_0^2 x_0^2 x_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -3\omega_0^2 x_0^2 x_1$$

Ergebnisse für $x_0(t)$ und $x_1(t)$ in komplexer Form einsetzen:

$$\begin{aligned}x_0(t) &= \text{Re} [A e^{i\omega_0 t}] \\ x_1^{\text{part}}(t) &\text{ ist durch (3) gegeben} \\ x_1^{\text{homo}}(t) &= -\frac{1}{32} A^3 \cos \omega_0 t = \text{Re} \left[-\frac{1}{32} A^3 e^{i\omega_0 t} \right] \\ \Rightarrow -3\omega_0^2 x_0^2 x_1 &= -3\omega_0^2 \left(\text{Re} [A e^{i\omega_0 t}] \right)^2 \text{Re} \left[\frac{1}{8} i \omega_0 A^3 t e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{32} A^3 e^{3i\omega_0 t} - \frac{1}{32} A^3 e^{i\omega_0 t} \right]\end{aligned}$$

Das Multiplizieren der e-Funktionen führt zu Addieren der Exponenten. Man kann sich daher überzeugen, dass nur die Kombinationen $\omega_0 t$, $3\omega_0 t$, $5\omega_0 t$ vorkommen, also enthält die partikuläre Lösung die Frequenzen ω_0 , $3\omega_0$ und $5\omega_0$.

3 Delta-Funktion

Allgemein gilt für die δ -Funktion

$$\int_a^b \delta(f(x)) g(x) dx = \sum_{\{x_0\}} \frac{1}{|f'(x_0)|} g(x_0)$$

wobei $\{x_0\}$ die Lösungen zu $f(x_0) = 0$ sind, die in $[a, b]$ liegen. Der einfachste Fall ist

$$\int_a^b \delta(x - u) g(x) dx = \begin{cases} g(u) & \text{falls } u \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$I_1 = \int_a^b [\delta(x+2)x^2 + \delta(x-\frac{1}{2})2x] dx \Rightarrow$ Die δ -Funktion liefert Beiträge bei $x = -2, \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x+2)x^2 + \delta(x-\frac{1}{2})2x] dx &= x^2 \Big|_{x=-2} + 2x \Big|_{x=\frac{1}{2}} = (-2)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5 \\ \int_{-5}^0 [\delta(x+2)x^2 + \delta(x-\frac{1}{2})2x] dx &= x^2 \Big|_{x=-2} + 0 = 4 \\ \int_{-1}^1 [\delta(x+2)x^2 + \delta(x-\frac{1}{2})2x] dx &= 0 + 2x \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1\end{aligned}$$

$I_2 = \int_a^b \delta(x^2 - 4) e^{-x} dx \Rightarrow f(x) = x^2 - 4$ also $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = \pm 2$
 $\Rightarrow |f'(x_0)| = |2x_0|_{x_0=\pm 2} = 4$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - 4) e^{-x} dx &= \sum_{x_0=\{-2, 2\}} \frac{1}{4} e^{-x} = \frac{1}{4} (e^2 + e^{-2}) = \frac{1}{2} \cosh 2 \\ \int_{-5}^0 \delta(x^2 - 4) e^{-x} dx &= \sum_{x_0=\{-2\}} \frac{1}{4} e^{-x} = \frac{1}{4} e^2 \\ \int_{-1}^1 \delta(x^2 - 4) e^{-x} dx &= 0 \quad \text{da die Wurzeln } x_0 = \pm 2 \text{ nicht im Integrationsbereich } [-1, 1] \text{ liegen}\end{aligned}$$