Universität Karlsruhe — Wintersemester 2003/04
Institut für Theorie der Kondensierten Materie — 9.1.04
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell — http://www-tkm.physik.uni-karlsruhe.de/lehre/
Sprechstunde: Fr 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14 — howell@tkm.physik.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 11 zur Theorie A

1 Kegelschnitte

In den nächsten Vorlesungen wird es gezeigt, dass sich ein Körper unter dem Einfluss des Newtonschen Gravitationsgesetzes entlang eines Kegelschnittes bewegt, in Polarkoordinaten

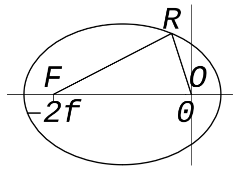
$$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi}\,, \quad \epsilon \geq 0\,, \quad p > 0\,. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass dies für $0 \leq \epsilon < 1$ die folgende Form in kartesischen Koordinaten ($x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $x^2+y^2 = r^2$) hat:

$$\frac{(x+f)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \quad f = \sqrt{a^2-b^2}\,, \quad a > b > 0\,. \tag{2}$$

Bestimmen Sie a, b, f als Funktionen von p, ϵ und skizzieren Sie die Kurve. Was sind die Extremwerte von x, y? Welche Kurve ergibt sich für $\epsilon = 0$?

(b) Die sogenannten Brennpunkte liegen auf der x-Achse bei $x = 0, -2f$. Berechnen Sie aus (2) die Abstände $|\overrightarrow{OR}|$ und $|\overrightarrow{RF}|$ zwischen den Brennpunkten und einem beliebigen Punkt (x, y) auf der Ellipse und zeigen Sie, dass ihre Summe eine Konstante ist.
Hinweis: Drücken Sie zunächst b, f durch ϵ, a aus. Beachten Sie die Vorzeichen beim Ziehen der Wurzeln!



(c) Bringen Sie den Kegelschnitt (1) in eine ähnliche Form wie (2) für den Fall $\epsilon > 1$ und skizzieren Sie die Kurve.
Welche Kurve ergibt sich für $\epsilon = 1$?

(d) Der Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$ lässt sich durch $x = \cos\phi$, $y = \sin\phi$ parameterisieren. Geben Sie $\cos\phi$ und $\sin\phi$ durch komplexe e-Funktionen $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\phi}$ an. Wozu führt die Transformation $x' = x, y' = \mathrm{i}y, \phi' = \mathrm{i}\phi$? *Hinweis:* Blatt 0, Aufgabe 1.

2 Dreidimensionales Potential

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in dem dreidimensionalen Potential $V(r) = \frac{1}{2}Dr^2$, wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

(a) Berechnen Sie die auf das Teilchen wirkende Kraft und geben Sie die (vektorielle) Bewegungsgleichung sowie ihre allgemeine Lösung an.

(b) Betrachten Sie die Lösung mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0\,, \quad y(0) = y_0\,, \quad \dot{y}(0) = 0\,, \quad z(0) = 0\,, \quad \dot{z}(0) = v_0\,.$$

Verifizieren Sie, dass die Bahnkurve eine Ellipse ist, und bestimmen Sie die Halbachsen. Berechnen Sie die Gesamtenergie $E = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$.

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Freitag, den 16.1.04 —