

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 11 zur Theorie A

1 Kegelschnitte

(a) Substituiere $x = r \cos \phi$ und $x^2 + y^2 = r^2$ in die Gleichung:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \phi} = \frac{p}{1 + \epsilon \frac{x}{r}} \Rightarrow r + \epsilon x = p \Rightarrow r^2 = (p - \epsilon x)^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = p^2 - 2p\epsilon x + \epsilon^2 x^2 \Rightarrow x^2 + \frac{2p\epsilon}{1 - \epsilon^2} x + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2}$$

Quadratische Ergänzung:

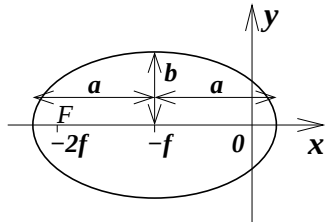
$$\left(x + \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 - \frac{p^2\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{p^2}{1 - \epsilon^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{p^2(1 - \epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2)^2} + \frac{p^2\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^2} = \frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x + \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1 - \epsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1 - \epsilon^2}} = 1 \quad (2)$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{(x + f)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit} \quad a = \frac{p}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}, \quad f = \frac{p\epsilon}{1 - \epsilon^2} = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (3)$$

und wir benötigen $\epsilon < 1$ damit b reell ist.Extremwerte: $-a(1 + \epsilon) = -\frac{p}{1 - \epsilon} < x < a(1 - \epsilon) = \frac{p}{1 + \epsilon}$, $-b < y < b$ Falls $\epsilon = 0 \Rightarrow a = b = p$, $f = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow$ Kreis mit Radius a zentriert am Ursprung.*Merke:* ϵ heisst die Exzentrizität und ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von einem Kreis (aus dem Griechischen *ek* 'von' und *kentron* 'Zentrum').

(b) Aus (3) folgt

$$f = a\epsilon, \quad b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (4)$$

$$\frac{(x + f)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \left[1 - \frac{(x + f)^2}{a^2}\right] = a^2(1 - \epsilon^2) \left[1 - \frac{(x + a\epsilon)^2}{a^2}\right]$$

$$\Rightarrow y^2 = (1 - \epsilon^2)[a^2 - (x + a\epsilon)^2] \quad (5)$$

 O hat die Koordinaten $(0, 0)$, F hat die Koordinaten $(-2f, 0) = (-2a\epsilon, 0)$ und ein beliebiger Punkt R hat die Koordinaten (x, y) , wobei x, y durch (5) verwandt sind.

$$|\vec{OR}| = |(x, y) - (0, 0)| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (1 - \epsilon^2)[a^2 - (x + a\epsilon)^2]}$$

$$= \sqrt{x^2 + (1 - \epsilon^2)[a^2(1 - \epsilon^2) - x^2 - 2xa\epsilon]} = \sqrt{a^2(1 - \epsilon^2)^2 + \epsilon^2 x^2 - 2xa\epsilon(1 - \epsilon^2)}$$

$$= \sqrt{[\epsilon x - a(1 - \epsilon^2)]^2} = \pm[\epsilon x - a(1 - \epsilon^2)] \quad (6)$$

Nun gilt auf der Ellipse $-a(1 + \epsilon) < x < a(1 - \epsilon)$. Setzen wir den maximalen Wert von x ein, finden wir

$$[\epsilon x - a(1 - \epsilon^2)] \Big|_{x=a(1-\epsilon)} = [\epsilon a(1 - \epsilon) - a(1 - \epsilon^2)] = \epsilon a - a = -a(1 - \epsilon)$$

Da $0 \leq \epsilon < 1$ ist dieser Ausdruck negativ, und daher ist der eckige Klammer in (6) negativ für alle erlaubten Werte von x . Da $|\vec{OR}|$ positiv sein muss (per Definition), wählen wir das Minuszeichen aus der Wurzel:

$$|\vec{OR}| = a(1 - \epsilon^2) - \epsilon x \quad (7)$$

Die Rechnung für $|\vec{RF}|$ ist genau analog:

$$|\vec{RF}| = |(-2f, 0) - (x, y)| = \sqrt{(-2a\epsilon - x)^2 + (-y)^2}$$

$$= \sqrt{(x + 2a\epsilon)^2 + (1 - \epsilon^2)[a^2 - (x + a\epsilon)^2]}$$

$$= \sqrt{(x^2 + 4a\epsilon x + 4a^2\epsilon^2) + (1 - \epsilon^2)[a^2(1 - \epsilon^2) - x^2 - 2xa\epsilon]}$$

$$= \sqrt{[x^2 - (1 - \epsilon^2)x^2] + [4a\epsilon x - (1 - \epsilon^2)2a\epsilon x] + [4a^2\epsilon^2 + a^2(1 - \epsilon^2)^2]}$$

$$= \sqrt{\epsilon^2 x^2 + 2a\epsilon x(1 + \epsilon^2) + a^2(1 + \epsilon^2)^2}$$

$$= \sqrt{[\epsilon x + a(1 + \epsilon^2)]^2} = \pm[\epsilon x + a(1 + \epsilon^2)] \quad (8)$$

Setzen wir den minimalen Wert von x ein, finden wir

$$[\epsilon x + a(1 + \epsilon^2)] \Big|_{x=-a(1+\epsilon)} = -a\epsilon(1 + \epsilon) + a(1 + \epsilon^2) = -a\epsilon + a = a(1 - \epsilon) > 0$$

Damit ist die eckige Klammer in (8) positiv für alle erlaubten Werte von x , also wählen wir das Pluszeichen aus der Wurzel:

$$|\vec{RF}| = a(1 + \epsilon^2) + \epsilon x \quad (9)$$

Die Summe von (7) und (9) ist eine Konstante, unabhängig von x :

$$|\vec{OR}| + |\vec{RF}| = 2a$$

Merke: Dieses Ergebnis liefert eine Methode, eine Ellipse zu zeichnen: Man hämmert zwei Nägel an den Brennpunkten fest, mit Abstand $2a\epsilon$ voneinander, und benutzt eine geschlossene Schnur der Länge $2a$ um einen Bleistift mit ihnen zu verbinden. Hält man die Schnur immer straff, kann sich der Bleistift nur entlang einer Ellipse bewegen.

- (c) Für $\epsilon > 1$ schreibt man (2) am besten als

$$\frac{\left(x - \frac{p\epsilon}{\epsilon^2 - 1}\right)^2}{\left(\frac{p}{1 - \epsilon^2}\right)^2} - \frac{y^2}{\frac{p^2}{\epsilon^2 - 1}} = 1$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{(x - f')^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1 \quad (10)$$

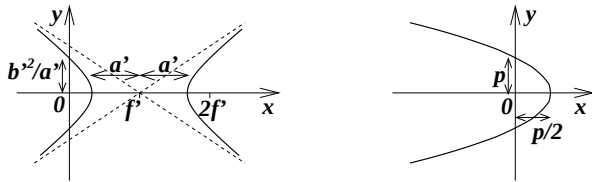
$$\text{mit } a' = \frac{p}{\epsilon^2 - 1}, \quad b' = \frac{p}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}}, \quad f' = \frac{p\epsilon}{\epsilon^2 - 1} = \sqrt{a'^2 + b'^2} = \epsilon a', \quad a', b' > 0$$

(10) ist die Gleichung einer Hyperbel. Die Asymptoten (gestrichelte Linien unten) sind $y = \pm \frac{b'}{a'}(x - f')$.

Für $\epsilon = 1$ darf man (2) nicht benutzen, da es durch $1 - \epsilon^2 = 0$ dividiert wurde. Die Form (1) liefert

$$r^2 = (p - x)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = p^2 - 2px + x^2 \Rightarrow x = \frac{p^2 - y^2}{2p} \quad (11)$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel (gedreht um 90° bezüglich der Standardform).



- (d) Variiert man ϕ , liefert das Gleichungspaar $x = \cos \phi$, $y = \sin \phi$ Punkte auf dem Einheitskreis, da $x^2 + y^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ einen Kreis in kartesischen Koordinaten darstellt. Substituiere $x' = x$, $y' = iy$, $\phi' = i\phi$:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x'^2 + (-iy')^2 = 1 \Rightarrow x'^2 - y'^2 = 1 \Rightarrow \text{Hyperbel}$$

Mit Hilfe der Formel von de Moivre, $e^{\pm i\phi} = \cos \phi \pm i \sin \phi$, und der Definition der Hyperbelfunktionen (Blatt 0, Aufgabe 1) bekommt man

$$\begin{aligned} x = \cos \phi &= \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \Rightarrow x' = \frac{e^{\phi'} + e^{-\phi'}}{2} = \cosh \phi' \\ y = \sin \phi &= \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \Rightarrow -iy' = \frac{e^{\phi'} - e^{-\phi'}}{2i} = \frac{\sinh \phi'}{i} \Rightarrow y' = \sinh \phi' \end{aligned}$$

Die Hyperbel ist also parameterisiert durch

$$\boxed{x' = \cosh \phi', \quad y' = \sinh \phi'}$$

Einsetzen der Parameterisierung in die Hyperbelgleichung liefert die schon bekannte Formel $\cosh^2 \phi' - \sinh^2 \phi' = 1$.

Merke: Man kann auch von (3) auf (10) durch $a' = -a$, $b' = ib$, $f' = -f$ kommen.

2 Dreidimensionales Potential

- (a) Mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist die Kraft gegeben durch

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} D \nabla(r^2) = -\frac{1}{2} D \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} r^2 \\ \frac{\partial}{\partial y} r^2 \\ \frac{\partial}{\partial z} r^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} D \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = -D \mathbf{r}$$

Bewegungsgleichung:

$$m \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = -D \mathbf{r} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0 \\ \ddot{y} + \frac{D}{m} y = 0 \\ \ddot{z} + \frac{D}{m} z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ drei unabhängige harmonische Oszillatoren der Frequenz $\omega_0^2 = \frac{D}{m}$.

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_x \cos \omega_0 t + B_x \sin \omega_0 t \\ y(t) &= A_y \cos \omega_0 t + B_y \sin \omega_0 t \\ z(t) &= A_z \cos \omega_0 t + B_z \sin \omega_0 t \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\mathbf{r}(t) = \mathbf{A} \cos \omega_0 t + \mathbf{B} \sin \omega_0 t} \quad (12)$$

wobei $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ vektorielle Integrationskonstanten sind.

- (b) Aus (12) folgt $\mathbf{r}(0) = \mathbf{A}$, $\dot{\mathbf{r}}(0) = \omega_0 \mathbf{B}$. Anfangsbedingungen einsetzen:

$$\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos \omega_0 t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0/\omega_0 \end{pmatrix} \sin \omega_0 t$$

oder $\boxed{x(t) = 0, \quad y(t) = y_0 \cos \omega_0 t, \quad z(t) = v_0/\omega_0 \sin \omega_0 t}$

Eine Ellipse muss die Form von (3) haben, also schreibe

$$\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t = 1 \Rightarrow \left(\frac{z(t)}{v_0/\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{y(t)}{y_0} \right)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Ellipse in der y - z -Ebene mit Halbachsen $y_0, \frac{v_0}{\omega_0}$.

Potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} D \mathbf{r}^2 = \frac{1}{2} D (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} D (y_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t)$$

Kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2} m (y_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t + v_0^2 \cos^2 \omega_0 t)$$

Mit der Definition $\omega_0^2 = D/m$ folgt

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (y_0^2 \cos^2 \omega_0 t + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2 \omega_0 t) + \frac{1}{2} m (y_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t + v_0^2 \cos^2 \omega_0 t) \\ &= \frac{1}{2} m \omega_0^2 y_0^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) + \frac{1}{2} m v_0^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} m (\omega_0^2 y_0^2 + v_0^2) \end{aligned}$$

Die Energie ist unabhängig von t und ist daher erhalten.