

Übungsblatt Nr. 12 zur Theorie A

Klausur

Die Klausur findet am Mittwoch, dem 4. Februar von 15:30–17:30 statt.

Gruppen 1–9: Gaede-Hörsaal

Gruppen 10–18: Gerthsen-Hörsaal

Sie müssen sich nicht vorher anmelden. Bitte bringen Sie Ihren **Studentenausweis** und Schreibwerkzeug mit; Papier wird gestellt. Es werden **keinerlei Hilfsmittel** erlaubt.

Mit mehr als 50% der Übungspunkte werden mindestens 40%, ansonsten 50% der Punkte in der Klausur benötigt, um den Schein zu bekommen. Am Anfang des Sommersemesters wird es eine Nachklausur geben.

1 Planetenbahnen

Die Bahn eines Planeten werde durch einen Kreis mit Radius R genähert. Berechnen Sie die Umlaufzeit T , die kinetische, potentielle und Gesamtenergie sowie den Drehimpuls L als Funktion von R . Geben Sie E_{gesamt} und L für Venus, Mars, Jupiter und Neptun in Einheiten von denen der Erde an (siehe Merkblatt für die Daten).

2 Erhaltung des Drehimpulses

(a) Gegeben seien zwei zeitabhängige Vektoren $\mathbf{a}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$. Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ und $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ durch Ausschreiben in Komponenten und vereinfachen Sie das Ergebnis.

(b) Zeigen Sie, dass für die Bewegung eines Planeten im Zentralfeld $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$ der Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ erhalten ist, d.h. $\dot{\mathbf{L}} = 0$. *Hinweis:* Bewegungsgleichung.

3 Ellipsenbahn

In der Vorlesung wurde für die Bewegung eines Planeten auf einer Ellipsenbahn folgender Ansatz angesehen:

$$x(\phi) = a(\cos \phi - \epsilon), \quad y(\phi) = b \sin \phi, \quad t(\phi) = \tau(\phi - \epsilon \sin \phi), \quad \epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}. \quad (1)$$

ϕ bezeichnet den Winkel der Verbindungslinie vom Planeten zum Mittelpunkt der Ellipse.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass dieser Ansatz tatsächlich die in der Vorlesung gegebene Bewegungsgleichung löst und zum dritten Keplerschen Gesetz führt.

Hinweis: Drücken Sie b durch a und ϵ aus, um $x^2 + y^2$ zu vereinfachen.

(b) Wie lautet der Drehimpuls L_z ? Zeigen Sie, dass die Energie $E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - GMm/r$ durch $E = -GMm/(2a)$ gegeben ist.

Leiten Sie aus (1) einen Ausdruck für die Umlaufzeit T als Funktion von τ her.

(c)* Welchen Ansatz könnte man für eine Hyperbelbahn machen?

Hinweis: Blatt 11, Aufgabe 1(d).

*=Bonusaufgabe

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Freitag, den 23.1.04 —