

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 12 zur Theorie A

1 Planetenbahnen

Kreisbahn mit Radius R , Umlaufzeit T , Kreisfrequenz $\dot{\phi} \equiv \omega = 2\pi/T$, Geschwindigkeit $v = 2\pi R/T = R\omega$.

Ein Planet der Masse M unter Einfluss der Sonne, Masse $M_\odot$, folgt dem dritten Keplerschen Gesetz (siehe Vorlesung): $GM_\odot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = R^3$.

$$T = 2\pi\sqrt{R^3/(GM_\odot)}$$

$$L_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z = MR^2\dot{\phi} = MR^2\omega = 2\pi MR^2/T = M\sqrt{GM_\odot R}$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}M(2\pi R/T)^2 = \frac{1}{2}GM_\odot M/R$$

$$E_{\text{pot}} = V(R) = -GM_\odot M/R$$

$$E_{\text{gesamt}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = -\frac{1}{2}GM_\odot M/R$$

Zum Vergleich mit E_{Erde} und L_{Erde} benötigen wir

$$\frac{E_{\text{Planet}}}{E_{\text{Erde}}} = \frac{\frac{1}{2}GM_\odot M_{\text{Planet}}/R_{\text{Planet}}}{\frac{1}{2}GM_\odot M_{\text{Erde}}/R_{\text{Erde}}} = \frac{M_{\text{Planet}} R_{\text{Erde}}}{R_{\text{Planet}} M_{\text{Erde}}}$$

$$\frac{L_{\text{Planet}}}{L_{\text{Erde}}} = \frac{M_{\text{Planet}} \sqrt{GM_\odot R_{\text{Planet}}}}{M_{\text{Erde}} \sqrt{GM_\odot R_{\text{Erde}}}} = \frac{M_{\text{Planet}}}{M_{\text{Erde}}} \sqrt{\frac{R_{\text{Planet}}}{R_{\text{Erde}}}}$$

Mit den Daten aus der Vorlesung folgt:

Planet	$L_{\text{Planet}}/L_{\text{Erde}}$	$E_{\text{Planet}}/E_{\text{Erde}}$
Venus	0.68	1.11
Mars	0.12	0.066
Jupiter	725	61
Neptun	76	0.84

2 Erhaltung des Drehimpulses

(a) Vektoren in Komponenten ausschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= (a_x(t), a_y(t), a_z(t)), & \mathbf{b}(t) &= (b_x(t), b_y(t), b_z(t)) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \frac{d}{dt} (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = \dot{a}_x b_x + a_x \dot{b}_x + \dot{a}_y b_y + a_y \dot{b}_y + \dot{a}_z b_z + a_z \dot{b}_z \\ &= \dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \frac{d}{dt} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dt} [(a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x - (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z] \\ &= (\dot{a}_y b_z + a_y \dot{b}_z - \dot{a}_z b_y - a_z \dot{b}_y) \mathbf{e}_x - (\dot{a}_x b_z + a_x \dot{b}_z - \dot{a}_z b_x - a_z \dot{b}_x) \mathbf{e}_y \\ &\quad + (\dot{a}_x b_y + a_x \dot{b}_y - \dot{a}_y b_x - a_y \dot{b}_x) \mathbf{e}_z \\ &= (\dot{a}_y b_z - \dot{a}_z b_y) \mathbf{e}_x - (\dot{a}_x b_z - \dot{a}_z b_x) \mathbf{e}_y + (\dot{a}_x b_y - \dot{a}_y b_x) \mathbf{e}_z \\ &\quad + (a_y \dot{b}_z - a_z \dot{b}_y) \mathbf{e}_x - (a_x \dot{b}_z - a_z \dot{b}_x) \mathbf{e}_y + (a_x \dot{b}_y - a_y \dot{b}_x) \mathbf{e}_z \\ &= \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Produktregel gilt für Vektoren genau so wie für Skalarfunktionen:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt}, \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$$

(b) Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Zeitliche Ableitung:

$$\dot{\mathbf{L}} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}$$

Nun per Definition $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ und die Bewegungsgleichung im Zentralfeld lautet $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$. Einsetzen:

$$\dot{\mathbf{L}} = \frac{1}{m} \mathbf{p} \times \mathbf{p} + \frac{1}{r} f(r) \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$$

da das Vektorprodukt eines Vektors mit sich selbst verschwindet. Damit ist der Drehimpuls zeitlich konstant, d.h. er ist erhalten.

3 Ellipsenbahn

(a) Die zu lösenden Gleichungen sind

$$\ddot{x} = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{GM y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (1)$$

Ansätze:

$$x(\phi) = a(\cos \phi - \epsilon), \quad y(\phi) = b \sin \phi, \quad t(\phi) = \tau(\phi - \epsilon \sin \phi), \quad \epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad (2)$$

Ableitungen mit Hilfe der Kettenregel ausrechnen, $\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \left(\frac{dt}{d\phi} \right)^{-1} = (\tau(1 - \epsilon \cos \phi))^{-1} = \frac{1}{\tau(1 - \epsilon \cos \phi)} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{d\phi}{dt} \frac{dx}{d\phi} = \frac{-a \sin \phi}{\tau(1 - \epsilon \cos \phi)} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{1}{\tau(1 - \epsilon \cos \phi)} \cdot \frac{d}{d\phi} \left(-\frac{a \sin \phi}{\tau(1 - \epsilon \cos \phi)} \right) \\ &= -\frac{a}{\tau^2(1 - \epsilon \cos \phi)} \frac{(1 - \epsilon \cos \phi) \cdot \cos \phi - \sin \phi \cdot \epsilon \sin \phi}{(1 - \epsilon \cos \phi)^2} = -\frac{a(\cos \phi - \epsilon)}{\tau^2(1 - \epsilon \cos \phi)^3} \\ &= -\frac{x}{\tau^2(1 - \epsilon \cos \phi)^3} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{dy}{d\phi} = \frac{b \cos \phi}{\tau(1 - \epsilon \cos \phi)} \quad (5)$$

Aus der Definition (1) von ϵ folgt $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$ und damit

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2(\cos \phi - \epsilon)^2 + b^2 \sin^2 \phi = a^2(\cos^2 \phi - 2\epsilon \cos \phi + \epsilon^2) + a^2(1 - \epsilon^2) \sin^2 \phi \\ &= a^2(1 - 2\epsilon \cos \phi + \epsilon^2 \cos^2 \phi) = a^2(1 - \epsilon \cos \phi)^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Einsetzen in die DGL

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \Rightarrow -\frac{x}{\tau^2(1 - \epsilon \cos \phi)^3} = -\frac{GMx}{[a^2(1 - \epsilon \cos \phi)^2]^{3/2}} \\ &\Rightarrow \boxed{GM\tau^2 = a^3} \end{aligned} \quad (7)$$

Derr Ansatz liefert nur dann eine Lösung der DGL, wenn die Parameter a und τ die Bedingung (7), d.h. das Keplersche Gesetz, erfüllen.

(Einsetzen in die DGL für $\ddot{y}$ liefert das gleiche Ergebnis.)

(b) Mit (3), (5) ist der Drehimpuls gegeben durch

$$\begin{aligned} L &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m \left[a(\cos \phi - \epsilon) \frac{b \cos \phi}{\tau(1 - \epsilon \cos \phi)} + b \sin \phi \frac{a \sin \phi}{\tau(1 - \epsilon \cos \phi)} \right] \\ &= \frac{mab}{\tau(1 - \epsilon \cos \phi)} (\cos^2 \phi - \epsilon \cos \phi + \sin^2 \phi) = \frac{mab}{\tau} = \frac{ma^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}}{\sqrt{a^3/(GM)}} \\ &\Rightarrow \boxed{L = m\sqrt{GMa(1 - \epsilon^2)}} \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie ist

$$E_{\text{gesamt}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - GMm/r$$

Mit (3), (5) und dem Keplerschen Gesetz (7) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^2 &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{a^2 \sin^2 \phi + b^2 \cos^2 \phi}{\tau^2(1 - \epsilon \cos \phi)^2} \\ &= \frac{a^2 \sin^2 \phi + a^2(1 - \epsilon^2) \cos^2 \phi}{\tau^2(1 - \epsilon \cos \phi)^2} = \frac{a^2(1 - \epsilon^2 \cos^2 \phi)}{\tau^2(1 - \epsilon \cos \phi)^2} \\ &= \frac{GM(1 + \epsilon \cos \phi)}{a(1 - \epsilon \cos \phi)} \end{aligned}$$

Aus (6) folgt $r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 - \epsilon \cos \phi)$ und damit

$$\begin{aligned} E_{\text{gesamt}} &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - GMm/r \\ &= \frac{GMm(1 + \epsilon \cos \phi)}{2a(1 - \epsilon \cos \phi)} - \frac{GMm}{a(1 - \epsilon \cos \phi)} \\ &= \frac{GMm}{2a(1 - \epsilon \cos \phi)} (1 + \epsilon \cos \phi - 2) \\ &\Rightarrow \boxed{E_{\text{gesamt}} = -\frac{GMm}{2a}} \end{aligned}$$

Merke: Für einen Kreis ($\epsilon = 0$) entspricht a dem Radius, und wir finden wieder die Formel aus 1(a).

Da ϕ ein Winkel ist, entsprechen $\phi = 0$ und $\phi = 2\pi$ dem selben Punkt. Die Umlaufzeit ist die Zeit, die verstreicht während sich der Planet von $\phi = 0$ nach $\phi = 2\pi$ bewegt:

$$T = t(2\pi) - t(0) = \tau(\phi - \epsilon \sin \phi) \Big|_{\phi=2\pi} - \tau(\phi - \epsilon \sin \phi) \Big|_{\phi=0} = 2\pi\tau$$

(c)* Die Bewegungsgleichungen sind die gleichen wie für eine Ellipsenbahn, nämlich (1); wir suchen nun einen neuen Ansatz, der zu einer Hyperbelbahn führt. Aus Blatt 11, Aufgabe 1(d) sieht man, dass der Einheitskreis und die Einheitshyperbel durch eine komplexe Transformation verwandt sind, also versuchen wir hier dasselbe. Definiere

$$x' = x, \quad y' = iy, \quad \phi' = i\phi$$

Aus derselben Aufgabe wissen wir auch

$$\cos i\phi' = \cosh \phi', \quad \sin i\phi' = i \sinh \phi'$$

Einsetzen in (2):

$$x(\phi) = a(\cos \phi - \epsilon) \Rightarrow x' = a(\cos(-i\phi') - \epsilon) \Rightarrow \boxed{x' = a(\cosh \phi' - \epsilon)} \quad (8)$$

$$y(\phi) = b \sin \phi \Rightarrow -iy' = b \sin(-i\phi') \Rightarrow \boxed{y' = b \sinh \phi'} \quad (9)$$

$$t(\phi) = \tau(\phi - \epsilon \sin \phi) \Rightarrow t = \tau(-i\phi' - \epsilon \sin(-i\phi')) \Rightarrow t = i\tau(\epsilon \sinh \phi' - \phi') \quad (10)$$

Damit $t(\phi')$ einer reellen Zeit entspricht, muss der Parameter τ imaginär sein, also definiere $\tau = -i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$

Der Vollständigkeit halber zeigen wir, dass dieser Ansatz tatsächlich die Bewegungsgleichung erfüllt.

Differenzieren mit der Kettenregel, $\frac{d}{dt} = \frac{d\phi'}{dt} \frac{d}{d\phi'}$, wie vorher liefert

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{A \sinh \phi'}{\xi(\epsilon \cosh \phi' - 1)}, \quad \frac{d^2 x'}{dt^2} = -\frac{x'}{\xi^2(\epsilon \cosh \phi' - 1)^3}$$

Wir benötigen auch

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= a^2(\cosh \phi' - \epsilon)^2 + b^2 \sinh^2 \phi' = a^2(\cosh^2 \phi' - 2\epsilon \cosh \phi' + \epsilon^2) + b^2(\cosh^2 \phi' - 1) \\ &= a^2 \left[\cosh^2 \phi' \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - 2\epsilon \cosh \phi' + \epsilon^2 - \frac{b^2}{a^2} \right] \\ &= a^2 \left[\epsilon^2 \cosh^2 \phi' - 2\epsilon \cosh \phi' + 1 + \cosh^2 \phi' \left(1 + \frac{b^2}{a^2} - \epsilon^2\right) - \left(1 + \frac{b^2}{a^2} - \epsilon^2\right) \right] \\ &= a^2(\epsilon \cosh \phi' - 1)^2 + a^2(\cosh^2 \phi' - 1) \left(1 + \frac{b^2}{a^2} - \epsilon^2\right) \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL, $\ddot{x}' = -\frac{GMx'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$, liefert

$$-\frac{x'}{\xi^2[(\epsilon \cosh \phi' - 1)^2]^{3/2}} = -\frac{GMx'}{[a^2(\epsilon \cosh \phi' - 1)^2 + a^2(\cosh^2 \phi' - 1) \left(1 + \frac{b^2}{a^2} - \epsilon^2\right)]^{3/2}}$$

Wenn wir $\epsilon^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ fordern, verschwindet der zweite Term im Nenner und damit ist die DGL für alle x', ϕ' erfüllt. (Für eine Ellipse hat man $\epsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, siehe (2).) Also lösen die Ansätze (8)–(10) die DGL, solange $a^3 = GM\xi^2$. Das letzte ist aber kein Keplersches Gesetz, da die Bewegung nicht periodisch ist und ξ deswegen mit keiner Umlaufzeit verwandt ist.