Universität Karlsruhe
Institut für Theorie der Kondensierten Materie
Prof. Dr. Ralph v. Baltz, Dr. Philip Howell
Sprechstunde: Fr 13:00–14:00 Physikhochhaus 10.14

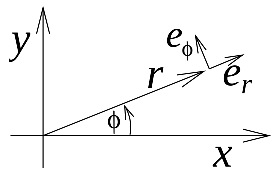
Wintersemester 2003/04
23.1.04
http://www-tkm.physik.uni-karlsruhe.de/lehre/
howell@tkm.physik.uni-karlsruhe.de

Übungsblatt Nr. 13 zur Theorie A

1 Polarkoordinaten

(a) Die Einheitsvektoren in Polarkoordinaten sind definiert als

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\phi\, \boldsymbol{e}_x + \sin\phi\, \boldsymbol{e}_y\,, \quad \boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\, \boldsymbol{e}_x + \cos\phi\, \boldsymbol{e}_y\,. \tag{1}$$



Zeigen Sie, dass sie senkrecht aufeinander stehende Einheitsvektoren sind, d. h. $\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_\phi = 0$ und $\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r = 1 = \boldsymbol{e}_\phi \cdot \boldsymbol{e}_\phi$.
Die Position eines Planeten unter Einfluss der Kraft $\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ sei durch $\boldsymbol{r} = r(t)\boldsymbol{e}_r$ gegeben. Da die Richtungen von $\boldsymbol{e}_r$ und $\boldsymbol{e}_\phi$ ortsabhängig sind, sind sie auch zeitabhängig. Zeigen Sie zunächst mit Hilfe der Kettenregel, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r = \dot\phi\,\boldsymbol{e}_\phi$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\phi = -\dot\phi\,\boldsymbol{e}_r$. Zeigen Sie nun, dass die Bewegungsgleichung lautet

$$\boldsymbol{F} = m(\ddot r - r\dot\phi^2)\boldsymbol{e}_r + m(2\dot r\dot\phi + r\ddot\phi)\boldsymbol{e}_\phi\,. \tag{2}$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (2), dass $L = mr^2\dot\phi$ erhalten ist, d. h. $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 0$. Geben Sie nun die Gesamtenergie $E = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + V(r)$ als Funktion von L und r an und zeigen Sie, dass die Bewegung des Planeten als die eines Teilchens in einem eindimensionalen effektiven Potential $V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$ betrachtet werden kann. Skizzieren Sie $V_{\text{eff}}(r)$ und interpretieren Sie es physikalisch.

2 Ellipsenfläche

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Flächenelement in Polarkoordinaten $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\phi$ lautet. Die Fläche ist dann durch Integration gegeben, $A = \int \mathrm{d}A$. Wir berechnen die Fläche einer Ellipse, für die gilt $r = \frac{p}{1+\epsilon\cos\phi}$.

(a) Eine nützliche Standardsubstitution ist $t = \tan\frac{\phi}{2}$ mit $\tan\phi = \dfrac{2\tan\frac{\phi}{2}}{1-\tan^2\frac{\phi}{2}} = \dfrac{2t}{1-t^2}$. Zeigen Sie, dass sie zu $A = \dfrac{2p^2}{(1+\epsilon)^2}\displaystyle\int_0^\infty \dfrac{1+t^2}{\left(1+\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}t^2\right)^2}\,\mathrm{d}t$ führt.

(b) Substituieren Sie nun $\tan u = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\,t$ und (mit Hilfe von Blatt 9, Aufgabe 1) berechnen Sie das Integral. Drücken Sie das Ergebnis durch a und b (Blatt 11, Aufgabe 1) aus.

3* Harmonischer Oszillator durch Integral der Bewegung

Die Energie eines harmonischen Oszillators lautet $E = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \text{Konstante}$. Fassen Sie diese Gleichung als DGL erster Ordnung für $x(t)$ auf und lösen Sie sie durch Trennung der Variablen. Drücken Sie E durch die Amplitude (maximale Auslenkung) aus.
Hinweis: Um das Integral zu berechnen, substituieren Sie $x = c\sin\theta$ mit c geeignet gewählt.

*=Bonusaufgabe

— Besprechung in den Übungsgruppen am nächsten Freitag, den 30.1.04 —