

Musterlösung zu Übungsblatt Nr. 13 zur Theorie A

1 Polarkoordinaten

(a) Nach Definition

$$\mathbf{e}_r = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \equiv \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \equiv \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = -\cos \phi \sin \phi + \sin \phi \cos \phi = 0$$

$$\text{und } \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

$$\text{und } \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = (-\sin \phi)^2 + \cos^2 \phi = 1$$

Da die Position des Planeten sich als Funktion der Zeit ändert, ist ϕ in den Definitionen von $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\phi$ zeitabhängig. Also schreibe $\frac{d}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \frac{d}{d\phi} = \dot{\phi} \frac{d}{d\phi}$.

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_r = \dot{\phi} \frac{d}{d\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{e}_\phi = \dot{\phi} \frac{d}{d\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_r$$

Nun $\mathbf{r} = r(t)\mathbf{e}_r$ und für die Bewegungsgleichung benötigen wir $\ddot{\mathbf{r}}$:

$$\mathbf{r} = r(t)\mathbf{e}_r$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d}{dt} \mathbf{e}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\dot{r}}{dt} \mathbf{e}_r + \dot{r} \frac{d}{dt} \mathbf{e}_r + \frac{dr}{dt} \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + r \frac{d\dot{\phi}}{dt} \mathbf{e}_\phi + r \dot{\phi} \frac{d}{dt} \mathbf{e}_\phi$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi \quad (2)$$

(b) Erhaltung von $L = mr^2\dot{\phi}$:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 2mr\dot{\phi} + mr^2\ddot{\phi} = mr(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})$$

Nun (2) in Komponenten schreiben, mit $\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r$:

$$-\frac{GMm}{r^2} \mathbf{e}_r = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \mathbf{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad \text{und} \quad 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi} = 0 \quad (3)$$

Aus der rechten Gleichung ($\mathbf{e}_\phi$ -Komponente) folgt $\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{Konstante}$ und deswegen ist es nützlich $\dot{\phi}$ durch $\frac{L}{mr^2}$ zu ersetzen.
Gesamtenergie mit Hilfe von (1):

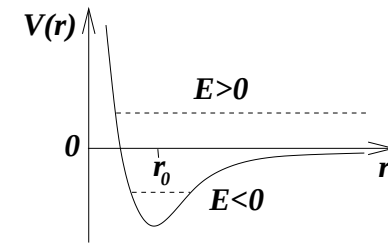
$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + V(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\phi} \mathbf{e}_\phi) \cdot (\dot{r} \mathbf{e}_r + r\dot{\phi} \mathbf{e}_\phi) - \frac{GMm}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{r}$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}}_{V_{\text{eff}}(r)} \quad (4)$$

Die Energie des Planeten ist die eines Teilchens, dass sich im eindimensionalen Potential $V_{\text{eff}}(r)$ bewegt.

Der erste Term in $V_{\text{eff}}(r)$ dominiert für $r \rightarrow 0$ und der zweite Term dominiert für $r \rightarrow \infty$. Es gibt ein Minimum bei $r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}$ mit $V(r_0) = -\frac{GM^2m^3}{L^2} < 0$.



Interpretation des ersten Terms:

Ableiten liefert die zugehörige Kraft, $\mathbf{F}_{\text{zent}}(r) = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2mr^2} \right) \mathbf{e}_r = \frac{L^2}{mr^3} \mathbf{e}_r = mr\dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r$, die man als Zentrifugalkraft erkennt $\Rightarrow$ Der erste Term ist die (drehimpulsabhängige) Potentialbarriere, die der Wirkung der Zentrifugalkraft entspricht. Je größer ist L , desto höher ist die Barriere und desto ungünstiger ist es, dem Ursprung nahe zu kommen $\Rightarrow$ die Zentrifugalkraft treibt den Planeten weg vom Ursprung.

Ein Planet mit Gesamtenergie $E < 0$ befindet sich in der Mulde und kann nur zwischen $r_{\min}$ und $r_{\max}$ schwanken, konsistent mit einer Ellipse — aus Blatt 12, Aufgabe 3(b) ist $E < 0$ die Bedingung für eine Ellipsenbahn.

Ein Planet mit Gesamtenergie $E > 0$ hat nur eine untere Schranke $r_{\min}$ aber kann sich nach $r \rightarrow \infty$ bewegen, konsistent mit einer Hyperbel.

Merke: Differenziere (4) nach t mit der Kettenregel:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \right) = m\dot{r}\ddot{r} - \frac{L^2\dot{r}}{mr^3} + \frac{GMm\dot{r}}{r^2}$$

$$= m\dot{r}\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2\dot{r} + \frac{GMm\dot{r}}{r^2} = m\dot{r} \left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \frac{GM}{r^2} \right)$$

Wegen der $\mathbf{e}_r$ -Komponente von (3) verschwindet die letzte Klammer, also $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E$ ist ein Integral der Bewegung.

2 Ellipsenfläche

$$(a) \quad A = \int dA = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{p^2}{2(1+\epsilon \cos \phi)^2} d\phi = p^2 \int_0^\pi \frac{1}{(1+\epsilon \cos \phi)^2} d\phi$$

wo im letzten Schritt die Spiegelsymmetrie bezüglich der x -Achse benutzt wurde. Substituiere $t = \tan \frac{1}{2}\phi$. Wir wissen (z. B. aus Blatt 3, Aufgabe 1), dass $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$, also

$$t = \tan \frac{\phi}{2} \Rightarrow \frac{dt}{d\phi} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\phi}{2} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{\phi}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + t^2) \Rightarrow d\phi = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Limites: $\phi = 0 \Rightarrow t = 0$ und $\phi = \pi \Rightarrow t = \tan \frac{\pi}{2} = \infty$.

Wir benötigen auch

$$\begin{aligned} \sec^2 \phi &= 1 + \tan^2 \phi = 1 + \left(\frac{2 \tan \frac{\phi}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\phi}{2}} \right)^2 = 1 + \left(\frac{2t}{1-t^2} \right)^2 = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1-t^2)^2} = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2} \right)^2 \\ &\Rightarrow \cos \phi = \frac{1}{\sec \phi} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} A &= p^2 \int_0^\pi \frac{1}{(1+\epsilon \cos \phi)^2} d\phi = p^2 \int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\epsilon \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= p^2 \int_0^\infty \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^2+\epsilon(1-t^2))^2} \frac{2dt}{1+t^2} = 2p^2 \int_0^\infty \frac{1+t^2}{(1+\epsilon+(1-\epsilon)t^2)^2} dt \\ &= \frac{2p^2}{(1+\epsilon)^2} \int_0^\infty \frac{1+t^2}{\left(1+\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}t^2\right)^2} dt \end{aligned}$$

(b) Substituiere $\tan u = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} t$. Differenzieren bezüglich t liefert

$$\tan u = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} t \Rightarrow \frac{du}{dt} \sec^2 u = \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \sec^2 u du$$

Limites: $t = 0 \Rightarrow u = 0$ und $t = \infty \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= \frac{2p^2}{(1+\epsilon)^2} \int_0^\infty \frac{1+t^2}{\left(1+\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}t^2\right)^2} dt \\ &= \frac{2p^2}{(1+\epsilon)^2} \int_0^{\pi/2} \frac{1+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\tan^2 u}{\left(1+\tan^2 u\right)^2} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \sec^2 u du \\ &= \frac{2p^2}{(1+\epsilon)^2} \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \int_0^{\pi/2} \frac{1+\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\tan^2 u}{\sec^4 u} \sec^2 u du \\ &= \frac{2p^2}{(1+\epsilon)\sqrt{(1+\epsilon)(1-\epsilon)}} \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2 u + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \sin^2 u \right) du \end{aligned}$$

Aus Blatt 9, Aufgabe 1 gilt $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u$. Einsetzen:

$$\begin{aligned} &= \frac{2p^2}{(1+\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2u}{2} + \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \frac{1-\cos 2u}{2} \right) du \\ &= \frac{p^2}{(1+\epsilon)(1-\epsilon)\sqrt{1-\epsilon^2}} \int_0^{\pi/2} [(1-\epsilon)(1+\cos 2u) + (1+\epsilon)(1-\cos 2u)] du \\ &= \frac{p^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} (2-2\epsilon \cos 2u) du \\ &= \frac{\pi p^2}{(1-\epsilon^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Ausdrücken durch $a = \frac{p}{1-\epsilon^2}$ und $b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ liefert

$$\boxed{A = \pi ab}$$

3* Harmonischer Oszillator durch Integral der Bewegung

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2} \\ &\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}} = dt \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 x^2}} = \int dt \end{aligned}$$

Substituiere $x = c \sin \theta \Rightarrow dx = c \cos \theta d\theta$:

$$\int \frac{c \cos \theta d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \omega^2 c^2 \sin^2 \theta}} = \int dt \Rightarrow \int \frac{c \cos \theta d\theta}{\omega c \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2 c^2} - \sin^2 \theta}} = \int dt$$

Wähle also $\frac{2E}{m\omega^2 c^2} = 1 \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$:

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{\omega \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \int dt \Rightarrow \frac{\theta}{\omega} + A = t$$

mit $A = \text{Konstante}$. Rücksubstitution:

$$x = c \sin \theta = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin(\omega t - A\omega)$$

$\Rightarrow$ harmonische Oszillationen mit Phasenverschiebung $A\omega$.

Die Amplitude a ist der Vorfaktor:

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

Dieses Ergebnis kann man auch aus dem Ausdruck für die Energie ablesen: wenn die maximale Auslenkung erreicht ist, kehrt der Körper zurück, also ändert das Vorzeichen der Geschwindigkeit $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$. Es folgt $E = \frac{1}{2} m 0^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2|_{x=a} = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$