1. Übung zur Vorlesung **Theoretische Physik A**
Universität Karlsruhe **WS 2004/05**

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Vorrechnen: Freitag, 29.10.2004

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Exponentialfunktion:
Wir wollen die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ herleiten, wenn diese durch die folgenden Relationen definiert wird:

$$f'(x) = f(x) \qquad f(0) = 1, \tag{1}$$

wobei $f'(x)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ bezeichnet. Die Funktion $f(x)$ sei durch folgende Reihenentwicklung dargestellt:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3}$$

Setzen Sie diese Reihenentwicklung in die Gleichungen (1) ein und bestimmen Sie die Koeffizienten a_n. Sie erhalten zunächst eine Rekursionsrelation, welche den Koeffizienten a_{n+1} mit dem Koeffizienten a_n in Verbindung bringt. Benutzen Sie die Definition der "Fakultät" der natürlichen Zahl n, definiert durch

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1) \cdot n \tag{4}$$

$$= \prod_{m=1}^{n} m \tag{5}$$

um die Koeffizienten a_n allgemein als Funktion von n zu bestimmen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Logarithmusfunktion:
Leiten Sie analog zu Aufgabe 1 eine Reihenentwicklung für die Funktion $g(x) = \ln(1+x)$ her, wobei diese Funktion die Relation

$$g'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad g(0) = 0 \tag{6}$$

erfüllt. Benutzen Sie dabei, dass $\frac{1}{1+x}$ als geometrische Reihe darstellbar ist, und bestimmen Sie die Reihenkoeffizenten.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ableitung der Umkehrfunktion:
Es sei $\varphi(y)$ die Umkehrfunktion zur ursprünglichen Funktion $y = f(x)$, d.h. es gilt

$$\varphi(f(x)) = x. \tag{7}$$

a) Zeigen Sie, dass durch Differenzieren beider Seiten dieser Gleichung unter Verwendung der Kettenregel die folgende Beziehung folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \left.\frac{1}{\varphi'(y)}\right|_{y=f(x)}. \tag{8}$$

b) Zeigen Sie mit dieser Methode, dass die Beziehungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x)=\frac{1}{x},\quad \text{und}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan(x)=\frac{1}{1+x^2} \tag{9}$$

gelten (Hinweis: $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$).

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Integration:
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{x^2+px+q} \qquad (p^2>4q))$

b) $\int \mathrm{d}x\, \frac{ax+b}{cx+d}$

c) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\, \cos^2\theta$

d) $\int_0^x \mathrm{d}x'\, \frac{1-e^{-x'}}{1+e^{-x'}}$

e) $\int \mathrm{d}x\;\; x\cdot\ln x$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Hyperbelfunktionen:
Die Hyperbelfunktionen sind folgendermaßen definiert:

$$\cosh x=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right),\quad \sinh x=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right),\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

a) Analysieren Sie das Verhalten von $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ für $x\to 0$ und $x\to\pm\infty$ und skizzieren Sie anhand der Ergebnisse die Funktionen. Hinweis: für kleine x gilt $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Definitionen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x$.

c) Beweisen Sie mit Hilfe der Definitionen die Beziehungen

$$\begin{aligned}\cosh^2 x-\sinh^2 x &= 1,\\ \cosh 2x &= \cosh^2 x+\sinh^2 x\\ \sinh 2x &= 2\sinh x\cdot\cosh x,\\ \tanh 2x &= \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}.\end{aligned}$$

Hinweis: Die Schreibweise $\cosh^2 x$ für $(\cosh x)^2$ usw. ist gebräuchlich.