

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A

ERSTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 1

5 Punkte

Laut Aufgabenstellung sind die Bedingungen $f'(x) = f(x)$ und $f(0) = 1$ gegeben. Wir schreiben die Funktion $f(x)$ wie angegeben als Reihe auf:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

Diese Reihe differenzieren wir einmal nach x :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + 4a_4 \cdot x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} \cdot x^n$$

1 Punkt

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich hieraus $a_0 = a_1 = 1$, da $f(0) = a_0 = 1$. Weiterhin kann man $a_1 = 2a_2$, $a_2 = 3a_3$, ... entnehmen (1 Punkt). Allgemein erkennt man das Schema $a_n = (n+1) \cdot a_{n+1}$.

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot a_n \text{ oder } a_n = \frac{1}{n} \cdot a_{n-1}$$

1 Punkt

Setzt man dies fort bis $n = 0$, so resultiert:

$$a_n = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot a_0 \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!}$$

2 Punkte

Damit sind wir schon fertig und erhalten:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \equiv \exp(x)$$

Aufgabe 2

5 Punkte

Die erste Ableitung und der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ sind gegeben:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} \text{ und } g(0) = 0$$

Auch hier gehen wir so vor wie bei der ersten Aufgabe:

$$g(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

$$g'(x) = a_1 + 2a_2 \cdot x + 3a_3 \cdot x^2 + 4a_4 \cdot x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} \cdot x^n$$

1 Punkt

Die Funktion $\frac{1}{1+x}$ kann – wie auf dem Aufgabenzettel angegeben – als geometrische Reihe dargestellt werden:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$$

1 Punkt

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $a_0 = 0$, da $g(0) = a_0 = 0$ (1 Punkt) und $a_1 = 1$, $2a_2 = -1$, $3a_3 = 1$, $4a_4 = -1$, ... (1 Punkt). Allgemein gilt also $n \cdot a_n = (-1)^{n-1}$:

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot (-1)^{n-1} \text{ für } n = 1, \dots, \infty$$

1 Punkt

Damit ergibt sich:

$$g(x) \equiv \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Aufgabe 3

5 Punkte

a.)

Wir betrachten $\varphi(f(x)) = x$. Durch Ableiten nach x unter Berücksichtigung der Kettenregel ergibt sich:

$$\varphi'(y)|_{y=f(x)} \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)|_{y=f(x)}}$$

1 Punkt

b.)

Was ist die erste Ableitung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$? Wir betrachten $\varphi(y) = \exp(y)$ und $f(x) = \ln(x)$.

$$\varphi'(y) = \exp(y) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \ln(x)$$

1 Punkt

Außerdem suchen wir die erste Ableitung der Arcustangensfunktion $\arctan(x)$. Es sei also $\varphi(y) = \tan(y)$ und $f(x) = \arctan(x)$, womit sich ergibt:

$$\varphi'(y) = \frac{d}{dy} \left[\frac{\sin(y)}{\cos(y)} \right] = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y}$$

1 Punkt

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan(x))}} = \cos^2(\arctan(x))$$

1 Punkt

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

Somit folgt:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx} \arctan(x)$$

1 Punkt

Aufgabe 4

5 Punkte

a.)

Das Polynom lässt sich folgendermaßen zerlegen:

$$x^2 + p \cdot x + q = \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \cdot \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right)$$

Dann ergibt sich mittels Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + p \cdot x + q} &= \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \cdot \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right)} = \\ &= \left[\frac{1}{x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} - \frac{1}{x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \right] \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \end{aligned}$$

Dies lässt sich nun schön nach x integrieren:

$$\int \frac{1}{x^2 + p \cdot x + q} dx = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \cdot \ln \left| \frac{x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}{x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \right| + \text{const.}$$

1 Punkt

b.)

Durch Auseinanderziehen kann man dieses Integral gut lösen:

$$\begin{aligned} \int \frac{a \cdot x + b}{c \cdot x + d} dx &= a \cdot \int \frac{x}{c \cdot x + d} dx + b \cdot \int \frac{1}{c \cdot x + d} dx = \frac{a}{c} \cdot \int \left(\frac{c \cdot x + d}{c \cdot x + d} - \frac{d}{c \cdot x + d} \right) dx + b \cdot \int \frac{1}{c \cdot x + d} dx = \\ &= \frac{a}{c} \cdot \left(x - \frac{d}{c} \cdot \ln \left| x + \frac{d}{c} \right| \right) + \frac{b}{c} \cdot \ln \left| x + \frac{d}{c} \right| = \frac{a}{c} \cdot x + \frac{b - \frac{d \cdot a}{c}}{c} \cdot \ln \left| x + \frac{d}{c} \right| + \text{const.} \end{aligned}$$

Betrachten wir als Sonderfall $c = 0$:

$$\frac{1}{d} \cdot \int (a \cdot x + b) dx = \frac{a}{2 \cdot d} \cdot x^2 + \frac{b}{d} \cdot x + \text{const.}$$

1 Punkt

c.)

Laut Formelsammlung gilt $\cos(2\vartheta) = 2 \cos^2 \vartheta - 1$ und damit $\cos^2 \vartheta = \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2}$. Beispielsweise kann man auf diese Weise das Integral berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{2\pi} (\cos^2 \vartheta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\vartheta)}{2} \right) = \frac{1}{2} + \int_0^{4\pi} \frac{d\varphi}{8\pi} \cos \varphi = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{8\pi} \cdot \sin \varphi \Big|_0^{4\pi}}_{=0} = \frac{1}{2}$$

1 Punkt

d.)

Hier hilft folgende Substitution weiter:

$$1 - \exp(-x) = u, \quad 1 + \exp(-x) = 2 - u, \quad du = \exp(-x) dx = (1 - u) dx$$

Damit ergibt sich:

$$\int \frac{1 - \exp(-x')}{1 + \exp(-x')} dx' = \int \frac{u}{2 - u} \cdot \frac{du}{1 - u} = - \int u du \cdot \left(\frac{1}{2 - u} - \frac{1}{1 - u} \right)$$

Zuerst zwei kleinere Nebenrechnungen:

$$\frac{u}{2 - u} = - \left(\frac{2 - u}{2 - u} - \frac{2}{2 - u} \right) = \frac{2}{2 - u} - 1$$

$$\frac{u}{1 - u} = - \left(\frac{1 - u}{1 - u} - \frac{1}{1 - u} \right) = \frac{1}{1 - u} - 1$$

Damit erhalten wir

$$\int du \left(\frac{2}{2 - u} - \frac{1}{1 - u} \right) = -2 \cdot \ln(2 - u) + \ln(1 - u)$$

und durch Rücksubstitution das Ergebnis:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1 - \exp(-x')}{1 + \exp(-x')} dx' &= 2 \ln(1 + \exp(-x)) - \ln[\exp(-x)] - 2 \cdot \ln(2) = \\ &= \boxed{2 \ln(1 + \exp(-x)) + x - 2 \cdot \ln(2)} \end{aligned}$$

1 Punkt

(Da Exponentialfunktionen immer positiv sind, ist auch das Argument des Logarithmus auf jeden Fall positiv, womit man in diesem Falle auf die Betragsstriche beim Logarithmus verzichten kann!)

e.)

Hier ist partielle Integration keine schlechte Idee:

$$\int x \cdot \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) \Big| - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4} + \text{const.} = \frac{x^2}{2} \cdot \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right) + \text{const.} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

Aufgabe 5

10 Punkte

a.)

Wir unterscheiden folgende Grenzfälle:

1.) Kleine x :

$$\sinh(x) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot x + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \approx x + \dots$$

$$\cosh(x) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \dots \right) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \approx x + \dots$$

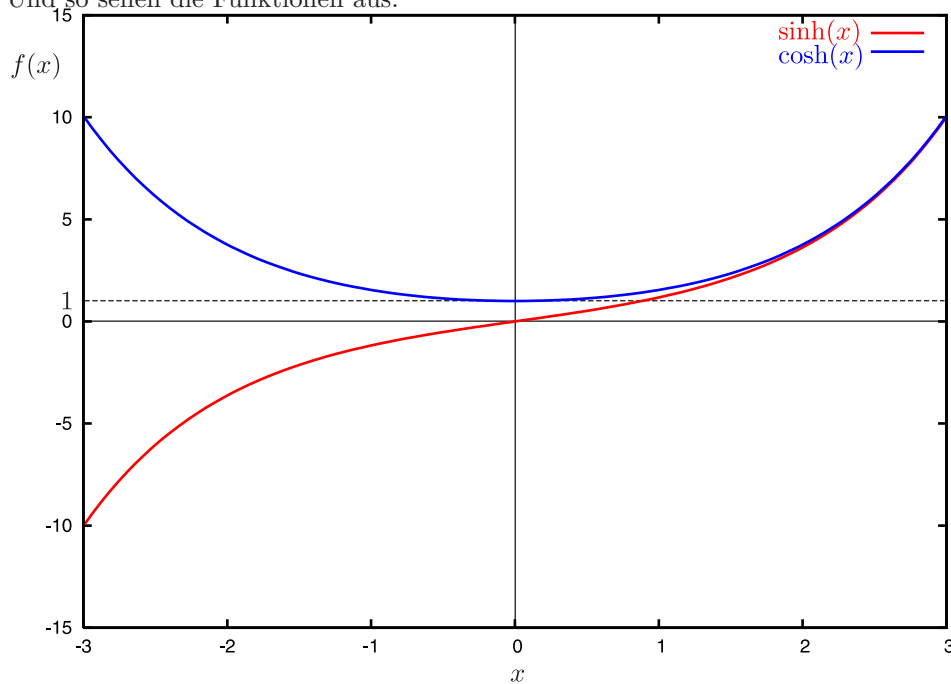
2.) Große x :

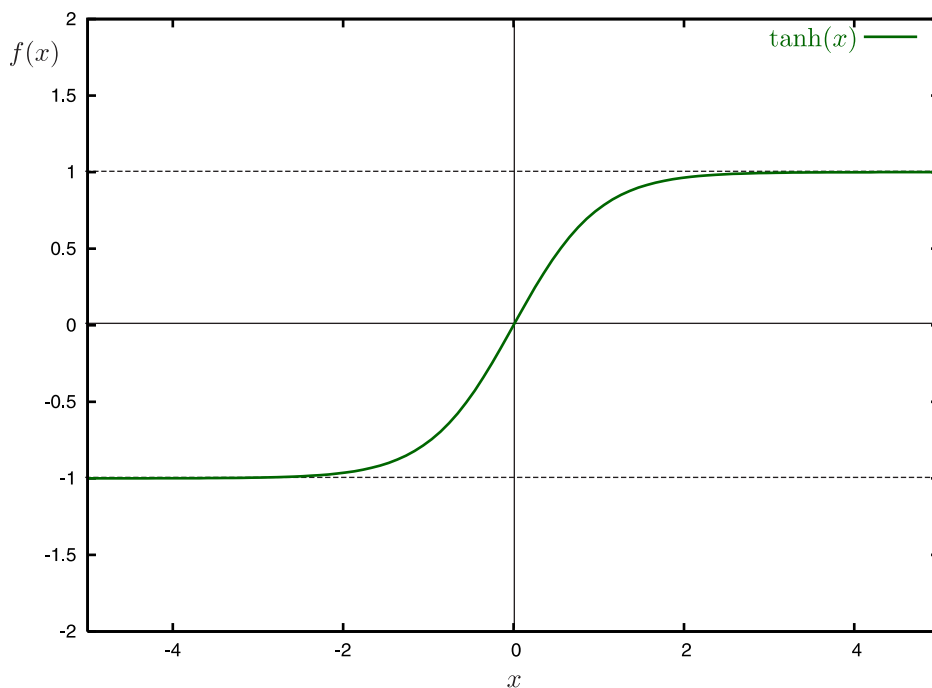
$$\sinh(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{2}, \quad \sinh(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{\exp(|x|)}{2}$$

$$\cosh(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{2}, \quad \cosh(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp(|x|)}{2}$$

$$\tanh(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1, \quad \tanh(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$$

Und so sehen die Funktionen aus:





Es gibt jeweils 1 Punkt für die Sinus-, Kosinus- und Tangenshyperbolikusfunktion.

b.)

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot (\exp(x) + \exp(-x)) = \boxed{\cosh(x)}$$

1 Punkt

$$\frac{d}{dx} \cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot (\exp(x) - \exp(-x)) = \boxed{\sinh(x)}$$

1 Punkt

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \boxed{1 - \tanh^2(x)} \stackrel{\text{siehe c.)}}{=} \boxed{\frac{1}{\cosh^2(x)}}$$

1 Punkt

c.)

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) &= \frac{1}{4} \cdot [(\exp(x) + \exp(-x))^2 - (\exp(x) - \exp(-x))^2] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot [2 \cdot \exp(x) \cdot \exp(-x) + 2 \cdot \exp(x) \cdot \exp(-x)] = \boxed{1} \end{aligned}$$

1 Punkt

$$\begin{aligned} \cosh(2x) &= \frac{1}{2} \cdot (\exp(2x) + \exp(-2x)) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot [\exp(2x) + 2 \cdot \exp(x) \cdot \exp(-x) + \exp(-2x) + \\ &\quad + \exp(2x) - 2 \cdot \exp(x) \cdot \exp(-x) + \exp(-2x)] = \\ &= \frac{1}{4} \cdot [(\exp(x) + \exp(-x))^2 + (\exp(x) - \exp(-x))^2] = \boxed{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)} \end{aligned}$$

1 Punkt

$$\begin{aligned} \sinh(2x) &= \frac{1}{2} \cdot (\exp(2x) - \exp(-2x)) = \frac{1}{2} \cdot (\exp(x) + \exp(-x)) \cdot (\exp(x) - \exp(-x)) = \\ &= \boxed{2 \cdot \cosh(x) \cdot \sinh(x)} \end{aligned}$$

1 Punkt

$$\tanh(2x) = \frac{\sinh(2x)}{\cosh(2x)} = \frac{2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x)}{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)} = \frac{2 \cdot \sinh(x) \cdot \cosh(x)}{\cosh^2(x) + \sinh^2(x)} \cdot \frac{\frac{1}{\cosh^2(x)}}{\frac{1}{\cosh^2(x)}} = \boxed{\frac{2 \cdot \tanh(x)}{1 + \tanh^2(x)}}$$

1 Punkt