Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Vorrechnen: Freitag, 5.11.2004

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Reihenentwicklungen der Hyperbelfunktionen:
Wir wollen die Reihenentwicklung der Hyperbelfunktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ herleiten, indem wir sie als Lösungen der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung darstellen:

$$f''(x) = f(x) \; . \tag{1}$$

Dabei verwenden wir eine Reihenentwicklung von $f(x)$ analog zur Aufgabe 1. Drücken Sie die Reihenglieder durch Fakultäten aus, ähnlich wie in Aufgabe 1.

a) Verwenden Sie zunächst die Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Dies beschreibt die Funktion $\sinh x$. (2.5 Punkte)

b) Verwenden Sie nun die Anfangsbedingungen $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$. Dies beschreibt die Funktion $\cosh x$. (2.5 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Beziehungen $\sinh x + \cosh x = e^x$ und $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$ gelten, indem Sie mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion aus Aufgabe 1 vergleichen. (2 Punkte)

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Lösungsmethoden für Integrale:
Berechnen Sie das Integral $\int_0^\infty x^3 e^{-x} \, \mathrm{d}x$, indem Sie formal einen Parameter λ einführen, und die Exponentialfunktion im Integranden als $e^{-x} = e^{-\lambda x}\big|_{\lambda=1}$ schreiben. Benutzen Sie die Eigenschaft $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} e^{-\lambda x} = -x e^{-\lambda x}$ um das Integral zu lösen. Hinweis: Sie können die Differentiation und Integration vertauschen. Setzen Sie erst am Schluss, nach der Integration und Differentiation $\lambda = 1$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Komplexe Zahlen:
Die Wurzel w einer reellen Zahl x ist definiert als die Lösung der Gleichung $w^2 = x$. Wir schreiben $w = \pm\sqrt{x}$ für die beiden Lösungen falls $x \geq 0$. Falls $x < 0$ ist, gibt es keine Wurzel von x im Bereich der reellen Zahlen. Wir wollen nun den Zahlenbereich erweitern, so dass Wurzeln aus allen Zahlen des Zahlenbereichs gezogen werden können. Dazu führen wir die *imaginäre Einheit* i durch folgende Definition ein:

$$i^2 = -1 \; . \tag{2}$$

Wird desweiteren eine *reelle* Zahl y der imaginären Einheit zugeordnet, erhält man eine *imaginäre* Zahl $y \cdot i \equiv i \cdot y$. Wir müssen uns nun als nächstes Gedanken über algebraische Operationen zwischen imaginären und reellen Zahlen machen. Wir definieren die Addition und die Multiplikation zweier imaginärer Zahlen durch $(y_1 \cdot i) + (y_2 \cdot i) = (y_1 + y_2) \cdot i$ und durch $(y_1 \cdot i)(y_2 \cdot i) = (y_1 y_2) \cdot i^2 = -y_1 y_2$ (das Produkt zweier imaginärer Zahlen ist also reell). Die Multiplikation einer reellen Zahl x mit einer imaginären Zahl y definieren wir mittels $x \cdot (y \cdot i) = (xy) \cdot i$.

a) Was ergibt sich für $(y \cdot i)^2$? Was ist $\sqrt{-1}$? Was ergibt sich für $\sqrt{-|y|}$?

Schließlich wollen wir auch eine Addition zwischen einer reellen Zahl x und einer imaginären Zahl $i \cdot y$ einführen: $z = x + i \cdot y \equiv i \cdot y + x$. Wir nennen z eine *komplexe* Zahl. x heißt *Realteil* und y heißt *Imaginärteil* der komplexen Zahl z. Relle und imaginäre Zahlen sind spezielle komplexe Zahlen $z = x + i \cdot y$ mit $y = 0$ bzw. $x = 0$. Die komplexe Zahl 0 ist definiert durch $z = x + i \cdot y$ mit $x = y = 0$. Zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ und $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$ seien genau dann gleich, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ gilt. Das Negative $(-z)$ einer komplexen Zahl $z = x + i \cdot y$ ist gegeben durch die Lösung der Gleichung $(-z) + z = 0$, also durch $(-z) = (-x) + i \cdot (-y)$. Nun wollen wir die (kommutative) Addition von komplexen Zahlen mit reellen und imaginären Zahlen so einführen, dass

$$(x_1 + i \cdot y_1) + x_2 = x_2 + (x_1 + i \cdot y_1) = (x_1 + x_2) + i \cdot y_1$$
$$(x_1 + i \cdot y_1) + (i \cdot y_2) = (i \cdot y_2) + (x_1 + i \cdot y_1) = x_1 + i \cdot (y_1 + y_2)$$

gilt. Weiter soll $(x_1 + i \cdot y_1) + x_2 = x_1 + (i \cdot y_1 + x_2)$ und $(x_1 + i \cdot y_1) + (i \cdot y_2) = x_1 + (i \cdot y_1 + i \cdot y_2)$ gelten (Assoziativität).

b) Was ergibt sich für $(x_1 + i \cdot y_1) + (x_2 + i \cdot y_2)$?

Die Subtraktion zweier komplexer Zahlen ist einfach durch $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ definiert. Die (kommutative+assoziative) Multiplikation zwischen einer komplexen Zahl und einer reellen oder einer imaginären Zahl soll distributiv sein, also

$$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot x_2 = x_2 \cdot (x_1 + i \cdot y_1) = (x_1 x_2) + i \cdot (y_1 x_2)$$
$$(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (i \cdot y_2) = (i \cdot y_2) \cdot (x_1 + i \cdot y_1) = x_1 \cdot (i \cdot y_2) + (i \cdot y_1) \cdot (i \cdot y_2) \, .$$

c) Was ergibt sich für $(x_1 + i \cdot y_1) \cdot (x_2 + i \cdot y_2)$?

d) Was ist das Einselement für die komplexe Multiplikation, was ist also die komplexe Zahl $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$, so dass $z_1 \cdot z = z$ für beliebige komplexe Zahlen $z = x + i \cdot y$?

Wir haben somit die Addition und Multiplikation zwischen komplexen Zahlen definiert. Schließlich wollen wir noch die Division für komplexe Zahlen einführen. Die komplexe Zahl $z = \frac{z_1}{z_2}$ soll so definiert sein, dass $z \cdot z_2 = z_1$ gilt.

e) Es sei $z = x + i \cdot y = \frac{z_1}{z_2}$, $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ und $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$. Lösen Sie die Gleichung $(x + i \cdot y) \cdot (x_2 + i \cdot y_2) = x_1 + i \cdot y_1$ bezüglich x und y.

Die *konjugiert komplexe* Zahl z^* zur komplexen Zahl $z = x + i \cdot y$ ist definiert als $z^* = x - i \cdot y$.

f) Es sei $z = x + i \cdot y$. Zeigen Sie, dass $z \cdot z^* = z^* \cdot z$ immer reell ist und drücken Sie diesen reellen Wert durch x und y aus.

g) Berechnen Sie

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*}$$

indem Sie $z_1 \cdot z_2^*$ berechnen, und das Ergebnis durch die reelle Zahl $z_2 \cdot z_2^*$ teilen.

Wir können nun beliebig Wurzeln w aus komplexen Zahlen z ziehen, definiert als Lösung der Gleichung $w^2 = z$. Die Gleichung hat zwei Lösungen.

h) Berechnen Sie die beiden Wurzeln der komplexen Zahl $z = i$, d.h. berechnen Sie $\sqrt{i}$, indem Sie in obiger Gleichung $w = x + i \cdot y$ schreiben, und die Gleichung nach x und y auflösen.