

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A

ZWEITES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 6

7 Punkte

Laut Aufgabenstellung genügen die Sinus- und Kosinushyperbolikusfunktionen der Differentialgleichung $f''(x) = f(x)$. Wir stellen $f(x)$ als Potenzreihe dar:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

Durch zweimaliges Ableiten ergibt sich daraus:

$$f''(x) = 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3 \cdot a_3 \cdot x + 3 \cdot 4 \cdot a_4 \cdot x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot (n+2) \cdot a_{n+2} \cdot x^n$$

Führt man bei beiden Reihen einen Koeffizientenvergleich durch, so ergibt sich folgende Rekursionsbeziehung:

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{(n-1) \cdot n}$$

1 Punkt

a.)

Aus den Bedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$ lassen sich die ersten beiden Koeffizienten bestimmen, nämlich:

$$a_0 = 0, a_1 = 1$$

1 Punkt

Durch Rekursion folgt daraus allgemein:

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{a_{2n-1}}{(2n) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

1 Punkt

Also ergibt sich folgende Potenzreihe für den Sinushyperbolikus:

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

b.)

Hier ergibt sich aus $f(0) = 1$ und $f'(0) = 0$:

$$b_0 = 1, b_1 = 0$$

1 Punkt

Allgemein lässt sich dies durch Rekursion fortführen:

$$b_{2n} = \frac{1}{(2n)!}, b_{2n+1} = 0$$

1 Punkt

Damit können wir auch den Kosinushyperbolikus darstellen:

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

c.)

Wir berechnen $\sinh(x) + \cosh(x)$, indem wir die aus den beiden vorherigen Aufgabenteilen erhaltenen Reihen addieren:

$$\sinh(x) + \cosh(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots$$

Durch Addition der jeweiligen Koeffizienten folgt:

$$c_0 = a_0 + b_0 = 0 + 1 = 1, \quad c_1 = a_1 + b_1 = 1 + 0 = 1$$

$$c_{2n} = a_{2n} + b_{2n} = 0 + \frac{1}{(2n)!} = \frac{1}{(2n)!}$$

$$c_{2n+1} = a_{2n+1} + b_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} + 0 = \frac{1}{(2n+1)!} \Rightarrow c_n = \frac{1}{n!} \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

1 Punkt

Dabei handelt es sich gerade um die Reihenkoeffizienten der Exponentialfunktion:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n \Rightarrow \sinh(x) + \cosh(x) = \exp(x)$$

Um $\sinh(x) - \cosh(x)$ zu berechnen, verfahren wir auf dieselbe Weise wie vorher, nur dass wir die Koeffizienten der Reihen voneinander subtrahieren:

$$\cosh(x) - \sinh(x) = d_0 + d_1 \cdot x + d_2 \cdot x^2 + \dots$$

$$d_0 = a_0 - b_0 = 1 - 0 = 1, \quad d_1 = a_1 - b_1 = 0 - 1 = -1$$

$$d_{2n} = a_{2n} - b_{2n} = \frac{1}{(2n)!} - 0 = \frac{1}{(2n)!}$$

$$d_{2n+1} = a_{2n+1} - b_{2n+1} = 0 - \frac{1}{(2n+1)!} = -\frac{1}{(2n+1)!} \Rightarrow d_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n!} \text{ für } n = 0, 1, 2, \dots$$

1 Punkt

Also gilt:

$$\cosh(x) - \sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (-1)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (-x)^n = \exp(-x) \Rightarrow \cosh(x) - \sinh(x) = \exp(-x)$$

Aufgabe 7

3 Punkte

Wir berechnen das Integral – wie angegeben – durch Einführung eines Parameters λ :

$$\int_0^{\infty} x^3 \cdot \exp(-x) \, dx = - \int_0^{\infty} \frac{d^3}{d\lambda^3} [\exp(-\lambda \cdot x)] \Big|_{\lambda=1} \, dx$$

1 Punkt

Nun ist es hier möglich, Integration und Differentiation zu vertauschen, da die zu integrierende Funktion nach x stetig differenzierbar ist:

$$\begin{aligned} I &= - \int_0^{\infty} \frac{d^3}{d\lambda^3} [\exp(-\lambda \cdot x)] \Big|_{\lambda=1} \, dx = - \frac{d^3}{d\lambda^3} \left[\int_0^{\infty} \exp(-\lambda \cdot x) \, dx \right] \Big|_{\lambda=1} = \\ &= - \frac{d^3}{d\lambda^3} \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot \exp(-\lambda \cdot x) \right]_0^{\infty} \Big|_{\lambda=1} = - \frac{d^3}{d\lambda^3} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \Big|_{\lambda=1} = - \frac{d^2}{d\lambda^2} \left(-\frac{1}{\lambda^2} \right) \Big|_{\lambda=1} = \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{2}{\lambda^3} \right) \Big|_{\lambda=1} = 6 \cdot \frac{1}{\lambda^4} \Big|_{\lambda=1} = \boxed{6} \end{aligned}$$

2 Punkte

Aufgabe 8

10 Punkte

a.)

$$(y \cdot i)^2 = (y \cdot i) \cdot (y \cdot i) = y^2 \cdot i^2 = \boxed{-y^2}$$

1 Punkt

1.) Es gilt $\sqrt{-1} = \pm i$, da $i^2 = -1$ ist.

2.) $\sqrt{-|y|} = \pm i \cdot \sqrt{|y|}$, da $(i \cdot \sqrt{|y|})^2 = -|y|$

1 Punkt

b.)

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = \boxed{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)}$$

1 Punkt

c.)

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = \boxed{(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)}$$

1 Punkt

d.)

$$z_1 \cdot z = (x_1 + iy_1) \cdot z = (x_1 + iy_1) \cdot (x + iy) = x \cdot x_1 - y \cdot y_1 + i \cdot (x \cdot y_1 + y \cdot x_1) \stackrel{!}{=} x + iy$$

Es muss also gelten:

$$x \cdot x_1 - y \cdot y_1 \stackrel{!}{=} x \text{ und } x \cdot y_1 + y \cdot x_1 \stackrel{!}{=} y$$

Diese Gleichungen sind erfüllt für:

$$\boxed{x_1 = 1, y_1 = 0}$$

1 Punkt

e.)

Laut Aufgabenstellung muss also folgende Gleichung bezüglich x und y gelöst werden:

$$(x + iy) \cdot (x_2 + iy_2) \stackrel{!}{=} x_1 + iy_1$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, muss gelten:

$$x_2 \cdot x - y_2 \cdot y = x_1 \quad (\text{I})$$

$$y_2 \cdot x + x_2 \cdot y = y_1 \quad (\text{II})$$

I $\cdot$ x_2 + II $\cdot$ y_2 ergibt:

$$x \cdot (x_2^2 + y_2^2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}}$$

1 Punkt

Aus II $\cdot$ x_2 - I $\cdot$ y_2 folgt:

$$y \cdot (x_2^2 + y_2^2) = x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}}$$

1 Punkt

f.)

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = \boxed{x^2 + y^2}$$

1 Punkt

Der Ausdruck ist reell und außerdem ≥ 0 .

g.)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \boxed{\frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \cdot \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}}$$

1 Punkt

h.)

Wir setzen $w = x + iy$ und $z = i$:

$$w^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2i \cdot x \cdot y \stackrel{!}{=} i$$

Durch Vergleich mit der rechten Seite erhält man die beiden Bedingungen $x^2 - y^2 = 0$ und $2 \cdot x \cdot y = 1$. Aus der ersten Gleichung ergibt sich $x = \pm y$. Setzen wir die erste Lösung in die zweite Gleichung ein, so folgt:

$$2 \cdot y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

Setzen wir die zweite Lösung $x = -y$ in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir die Bedingung $-2 \cdot y^2 = 1$, die jedoch nur für komplexe y erfüllt werden kann. y muss aber reell sein und damit bleiben uns nur die beiden obigen Lösungen für x und y , womit als Ergebnis folgt:

$$\boxed{\sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}}$$

1 Punkt