3. Übung zur Vorlesung **Theoretische Physik A**
Universität Karlsruhe **WS 2004/05**

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Vorrechnen: Freitag, 12.11.2004

Aufgabe 9 Rechnen mit komplexen Zahlen: (5 Punkte)

a) Bringen Sie die folgenden Ausdrücke in die Form $a + ib$:

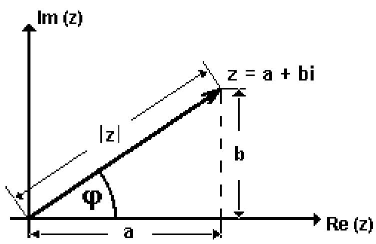
$$\frac{8i-1}{i} \qquad \frac{-1+5i}{2+3i} \qquad i^3(i+2)^2 \, .$$

(3 Punkte)

b) Schreiben Sie die komplexe Gleichung $z^3+5z^2 = z^*+3i$, wobei $z = x+iy$ und $z^* = x - iy$, als zwei reelle Greichungen. Trennen Sie dabei nach Real- und Imaginärteil. (Die Lösung der Gleichungen ist nicht verlangt.) (2 Punkte)

Aufgabe 10 Komplexe Zahlenebene: (5 Punkte)

Wir wollen die komplexen Zahlen in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen, auf deren x-Achse wir den Realteil, und auf deren y-Achse wir den Imaginärteil auftragen. Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ wird dann als Pfeil vom Ursprung des Koordinatensystems zu den Koordinaten (a, b) dargestellt. Diese Darstellung wird *komplexe Zahlenebene* genannt.



a) Zeigen Sie, dass der *Betrag der komplexen Zahl*, definiert durch $r \equiv |z| = \sqrt{z \cdot z^*}$, durch die Länge des Pfeiles gegeben wird. (2 Punkte)

b) Wir bezeichnen den Winkel zwischen dem Pfeil und der x-Achse des Koordinatensystems, gemessen gegen den Uhrzeigersinn, mit φ (siehe Bild). Zeigen Sie, dass dann $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$. (3 Punkte)

Wir bezeichnen die Koordinaten (r, φ) als *Polarkoordinaten* der komplexen Zahl z. φ heiß auch *Argument* der komplexen Zahl.

Aufgabe 11 Kosinus- und Sinusfunktion: (5 Punkte)

Ausgehend von den Reihenentwicklungen für die Kosinushyperbolikus- und Sinushyperbolikusfunktion,

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

leiten Sie die Reihenentwicklungen für $\cosh(i\varphi)$ und $\sinh(i\varphi)$ her, indem Sie formal in den Reihen x durch $i\varphi$ ersetzen, und die Ausdrücke für i^{2n} bzw i^{2n+1} berechnen. Zeigen Sie, dass $\cosh(i\varphi)$ rein reell, und dass $\sinh(i\varphi)$ rein imaginär ist. Wir bezeichen die reelle Funktion $\cosh(i\varphi) = \cos\varphi$ als Kosinusfunktion und die reelle Funktion $\sinh(i\varphi)/i = \sin\varphi$ als Sinusfunktion.

Aufgabe 12 Komplexe Exponentialfunktion: (5 Punkte)

a) Ausgehend von den Reihenentwicklungen für die Exponentialfunktion, zeigen Sie, dass gilt

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $|e^{i\varphi}| = 1$ ist. Zeigen Sie weiter, dass daraus

$$z = |z| \cdot e^{i\varphi} \tag{2}$$

folgt. Zeigen Sie schließlich, dass $e^{i\pi} + 1 = 0$ (*Eulersche Gleichung*).
(4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

(1 Punkt)

Aufgabe 13 Einheitswurzeln: (5 Punkte)
Wir wollen nun die Lösungen der komplexen Gleichung

$$z^n = 1 \tag{3}$$

(mit n Element der natürlichen Zahlen) finden. Schreiben Sie diese Gleichung in Polarkoordinatendarstellung. Finden Sie dann alle Lösungen dieser Gleichung (Hinweis: es gibt n Lösungen). Zeichnen Sie die Lösungen in der komplexen Ebene für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$.

Aufgabe 14 Rechnen mit Polarkoordinaten: (5 Punkte)
Bringen Sie die folgenden Ausdrücke in die Form $re^{i\varphi}$ und zeichnen Sie sie in der komplexen Ebene:

$$1 + i\sqrt{3} \qquad -1 - i \qquad (1-i)^{\frac{1}{2}} \qquad i^{\frac{1}{4}}$$

Für die letzten beiden Ausdrücke gibt es zwei bzw. vier Lösungen.