

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A

DRITTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 9: Rechnen mit komplexen Zahlen

5 Punkte

a.)

$$\frac{8i - 1}{i} = -i \cdot (8i - 1) = \boxed{8 + i}$$

1 Punkt

$$\frac{-1 + 5i}{2 + 3i} = \frac{(-1 + 5i) \cdot (2 - 3i)}{4 + 9} = \frac{(-2 + 15) + i(3 + 10)}{13} = \frac{13 + 13i}{13} = \boxed{1 + i}$$

1 Punkt

$$i^3 \cdot (i + 2)^2 = -i \cdot (i + 2)^2 = -i \cdot (i + 2) \cdot (i + 2) = -i \cdot [(4 - 1) + i(2 + 2)] = \boxed{4 - 3i}$$

1 Punkt

b.)

$$z^3 + 5z^2 = z^* + 3i$$

$$(x + iy)^3 + 5 \cdot (x + iy)^2 = x - iy + 3i$$

$$(x + iy)^2 \cdot (x + iy + 5) = [(x^2 - y^2) + 2i \cdot xy] \cdot [(x + 5) + iy] = x + i \cdot (3 - y)$$

Durch Vergleich von Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich folgendes Gleichungssystem bestehend aus zwei reellen Gleichungen:

$$(x^2 - y^2) \cdot (x + 5) - 2xy^2 = x \quad (\text{I})$$

1 Punkt

$$(x^2 - y^2) \cdot y + 2xy \cdot (x + 5) = 3 - y \quad (\text{II})$$

1 Punkt

Die explizite Lösung des Gleichungssystems ist nach Aufgabenstellung nicht verlangt.

Aufgabe 10: Komplexe Zahlenebene

5 Punkte

a.)

$$|z| = \sqrt{(a + ib) \cdot (a - ib)} = \boxed{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

1 Punkt

$|z|$ ist die geometrische Länge des Pfeils in der komplexen Ebene.

1 Punkt

b.)

Wir stellen Gleichungen auf für den Winkel, welcher vom Pfeil und der x -Achse eingeschlossen wird:

$$\cos \varphi = \frac{a}{|z|} = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$$

1 Punkt

$$\sin \varphi = \frac{b}{|z|} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

1 Punkt

Damit kommen wir auf die sogenannte Polardarstellung der komplexen Zahlen:

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z) = |z| \cdot \cos \varphi + i \cdot |z| \cdot \sin \varphi = \boxed{|z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

1 Punkt

Aufgabe 11: Kosinus- und Sinusfunktion

5 Punkte

Wir berechnen gerade und ungerade Potenzen von i :

$$i^{2n} = (-1)^n, i^{2n+1} = (-1)^n \cdot i$$

2 Punkte

Damit setzen wir in die Reihendarstellung der Sinus- und Kosinushyperbolikusfunktionen das Argument $i\varphi$ ein und werten die Ausdrücke aus:

$$\cosh(i\varphi) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \varphi^{2n}}_{\text{reell}} = \boxed{\cos \varphi}$$

1,5 Punkte

$$\sinh(i\varphi) = i \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \varphi^{2n+1}}_{\text{reell}} = \boxed{i \sin \varphi}$$

1,5 Punkte

Aufgabe 12: Komplexe Exponentialfunktion

7 Punkte

a.)

Wir werten die komplexe Exponentialfunktion mittels ihrer Reihendarstellung aus:

$$\begin{aligned} \exp(i\varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} \cdot \varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} \cdot \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \varphi^{2n}}{(2n)!} + i \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} = \boxed{\cos \varphi + i \sin \varphi} \end{aligned}$$

2 Punkte

Für den Betrag der komplexen Exponentialfunktion ergibt sich:

$$|\exp(i\varphi)| = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \boxed{1}$$

1 Punkt

Aus dem Ergebnis von Aufgabe 10b.) folgt:

$$z = |z| \exp(i\varphi) = \boxed{|z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

1 Punkt

Schließlich gilt:

$$\exp(i\pi) = \cos \pi + i \sin \pi = \boxed{-1} \Rightarrow \boxed{\exp(i\pi) + 1 = 0}$$

1 Punkt

b.)

Mittels der Polardarstellung und $\cos(-\varphi) = \cos(\varphi)$ und $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$ ergibt sich:

$$\exp(i\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi, \exp(-i\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$$

1 Punkt

Dabei handelt es sich um ein System aus zwei Gleichungen, das nach $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ aufgelöst werden kann:

$$\boxed{\frac{\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)}{2} = \cos \varphi, \frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i} = \sin \varphi}$$

1 Punkt

Aufgabe 13: Einheitswurzeln

5 Punkte

Wir schreiben dazu

$$z^n = (r \cdot \exp(i\varphi))^n = r^n \cdot \exp(in\varphi) = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = \boxed{1}$$

1 Punkt

Daraus folgt zunächst $r^n = 1$, also $r = 1$ (r muss positiv definit sein). Weiter folgt $\cos(n\varphi) = 1$ und $\sin(n\varphi) = 0$, was die Lösungen

$$\varphi = \frac{k \cdot 2\pi}{n} \text{ für } k = 0, 1, \dots, n-1$$

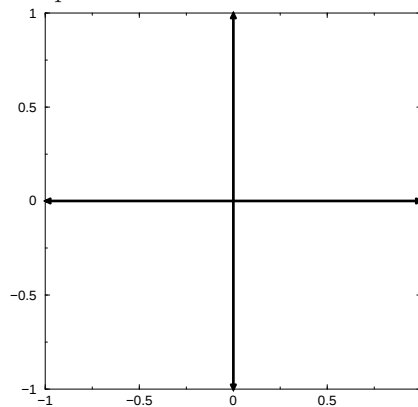
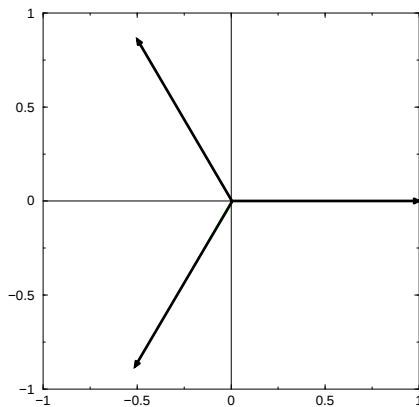
1 Punkt

hat. Es gilt also:

$$z = \cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) \text{ für } k = 0, \dots, n-1$$

1 Punkt

Da für $k = n + m$ mit $m \geq 0$ die Beziehung $k \cdot 2\pi/n = 2\pi + m \cdot 2\pi/n$ gilt, erhalten wir keine neuen Lösungen für $n > n-1$. Auch für $n < 0$ erhalten wir keine zusätzlichen Lösungen. Damit gibt es genau n Lösungen. Die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ sollen außerdem in der komplexen Ebene veranschaulicht werden:



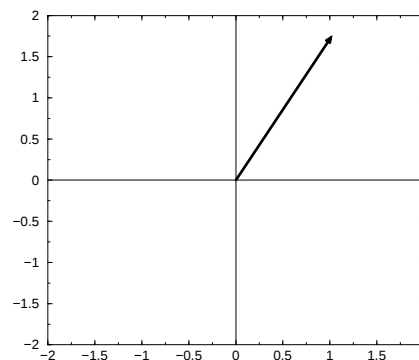
2 Punkte

Aufgabe 14: Rechnen mit Polarkoordinaten

5 Punkte

i.)

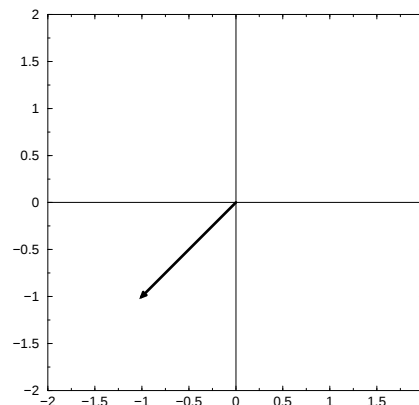
$$1 + i\sqrt{3} = 2 \cdot \exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$$



1 Punkt

ii.)

$$-1 - i = \sqrt{2} \cdot \exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right)$$

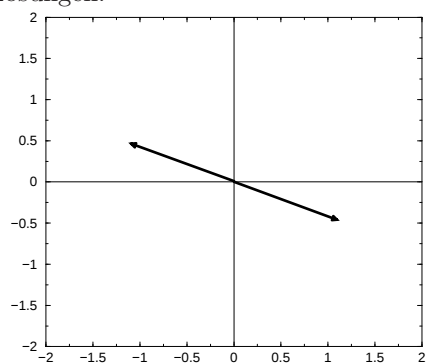


1 Punkt

iii.)

Bei dieser Aufgabe kommt man auf zwei verschiedene Lösungen:

	Lösung ①	Lösung ②
$(1-i)^{\frac{1}{2}}$	$2^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left(i\frac{7\pi}{8}\right)$	$2^{\frac{1}{4}} \cdot \exp\left(i\frac{15\pi}{8}\right)$



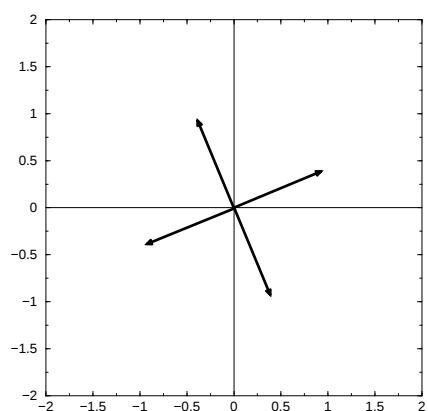
1 Punkt

iv.)

Hier gibt es vier verschiedene Lösungen:

	Lösung ①	Lösung ②
$i^{\frac{1}{4}}$	$\exp\left(i\frac{\pi}{8}\right)$	$\exp\left(i\frac{5\pi}{8}\right)$

	Lösung ③	Lösung ④
$i^{\frac{1}{4}}$	$\exp\left(i\frac{9\pi}{8}\right)$	$\exp\left(i\frac{13\pi}{8}\right)$



2 Punkte

Anmerkung:

Alle Phasen sind modulo 2π bestimmt.