4. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik A
Universität Karlsruhe WS 2004/05

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Vorrechnen: Freitag, 19.11.2004

Aufgabe 15 (4 Punkte)

Die Taylorreihenentwicklung:
Gegeben sei die Reihenentwicklung einer Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass dann die Beziehung

$$f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n \tag{2}$$

gilt, wobei $f^{(n)}(0)$ die n-te Ableitung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x = 0$ bezeichnet. Wir haben damit gezeigt, dass die Reihenentwicklung dieser Funktion auch als

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{3}$$

geschrieben werden kann.

Aufgabe 16 (4 Punkte)

Fourier-Reihen:
Jede periodische Funktion $f(t)$ mit Periode T kann als Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)], \tag{4}$$

wobei $\omega = 2\pi/T$. Die Koeffizienten lassen sich bestimmen aus

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\ f(t)\ \cos(\omega n t), \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\ f(t)\ \sin(\omega n t). \tag{5}$$

Berechnen Sie die Entwicklungen der folgenden Funktionen mit Periode 2π:

a) Sägezahnfunktion: $f(t) = t$ für $-\pi < t < \pi$. (2 Punkte)

b) Rechteckfunktion: $f(t) = \begin{cases} f_o & \text{für} \quad 0 < t < \pi\ , \\ -f_o & \text{für} \quad \pi < t < 2\pi\ . \end{cases}$ (2 Punkte)

Aufgabe 17 (9 Punkte)

Fallschirmspringer:
Ein Fallschirmspringer wird annähernd durch die Gleichung

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - c \cdot v \cdot |v|, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v \tag{6}$$

mit den Anfangsbedingungen $z(t=0) = z_0$ und $v(t=0) = 0$ beschrieben. Behandeln Sie dieses Problem analog zu dem in der Vorlesung behandelten Problem $m \cdot \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -mg - cv$.

a) Lösen Sie die Gleichung (6) durch Separation der Variablen und bestimmen Sie die Funktionen $v(t)$ und $z(t)$. (4 Punkte)

b) Betrachten Sie die Grenzfälle $t \ll \tau$ und $t \gg \tau$ wobei $\tau = \sqrt{\frac{m}{gc}}$ ist. (2 Punkte)

c) Skizzieren Sie die Funktionen $v(t)$ und $z(t)$, wobei das asymptotische Verhalten der Funktionen sowie die charkteristische Zeit τ korrekt wiedergegeben sein sollten. (3 Punkte)

Hinweis: Verwenden Sie das Restultat aus Aufgabe 4d, sowie

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \qquad (|x| < a) \tag{7}$$

Benutzen Sie zur Betrachtung der Grenzfälle die Ergebnisse aus Aufgabe 2.

Aufgabe 18 (8 Punkte)

Raketenbeschleunigung:
Wir betrachten eine Rakete, deren totale Masse $M(t) = m_0 + m_g(t)$ sich aus der (zeitlich konstanten) Masse m_0 der Rakete und der zeitabhängigen Masse $m_g(t)$ des Treibstoffgases zusammensetzt. Die Rakete stößt einen Strom von heißem Gas mit einer zeitlich konstanten Relativgeschwindigkeit (d.h. relativ zur Rakete selbst) von v_r nach hinten aus, mit einer Rate von $\frac{\mathrm{d}m_g}{\mathrm{d}t}(< 0)$. Der Rückstoß des Gases auf die Rakete übt auf diese eine Schubkraft aus. Im Weltall (fern aller größeren Himmelskörper) können alle anderen Kräfte vernachlässigt werden. Die Bewegungsgleichung der Rakete lautet:

$$M(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -v_r \frac{\mathrm{d}m_g(t)}{\mathrm{d}t} \; . \tag{8}$$

a) Nehmen Sie an, dass $m_g = m_{g0}(1 - t/\tau)$ (für $0 \leq t < \tau$), (d.h. dass das Gas mit einer konstanten Rate ausgestoßen wird). Bringen Sie Gleichung (8) in die Form

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{v_r}{\tau' - t} \; , \tag{9}$$

und finden Sie τ'. (1 Punkt)

b) Berechnen Sie $v(t)$ (durch Separation der Variablen) mit Anfangsbedingung $v(0) = 0$. (1 Punkt)

c) Für $t \geq \tau$ bleibt die Geschwindigkeit konstant, da kein Gas zur Beschleunigung mehr vorhanden ist. Berechnen Sie die Endgeschwindigkeit v_e! (1 Punkt)

d) Zeigen Sie durch Integration von $v(t)$, dass der zurückgelegten Abstand $x(t)$ (Anfangsbedingung: $x(0) = 0$) durch folgenden Ausdruck gebeben wird:

$$x(t) = \tau' v_r \left[(1 - t/\tau') \ln(1 - t/\tau') + t/\tau' \right] \; . \tag{10}$$

(2 Punkte)

e) Berechnen Sie das Verhalten von $v(t)$ und $x(t)$ für kleine Zeiten, indem Sie die Ergebnisse von 18b) und 18d) fr $t/\tau' \ll 1$ entwickeln. Benutzen Sie dazu die Gleichung (3) aus Aufgabe 15 mit $x = t/\tau'$. (Hinweis: für $v(t)$ und $x(t)$ müssen Sie bis zur Ordnung t/τ', bzw. $(t/\tau')^2$ entwickeln.) Erläutern Sie das Ergebnis! (3 Punkte)