

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A

VIERTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 15

4 Punkte

Wir schreiben für die Reihen der n -ten und $(n+1)$ -ten Ableitung

$$f^{(n)}(x) = a_{n,0} + a_{n,1} \cdot x + a_{n,2} \cdot x^2 + \dots$$

$$f^{(n+1)}(x) = a_{n+1,0} + a_{n+1,1} \cdot x + a_{n+1,2} \cdot x^2 + \dots$$

1 Punkt

usw. Für $f(x)$ schreiben wir:

$$f(x) = a_{0,0} + a_{0,1} \cdot x + a_{0,2} \cdot x^2 + \dots$$

Es ist offensichtlich $a_{0,k} = a_k$. Weiter gilt:

$$a_{n+1,k} = a_{n,k+1} \cdot (k+1), \text{ da } f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}(x)]'$$

2 Punkte

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= a_{n,0} = a_{n-1,1} \cdot 1 = a_{n-2,2} \cdot 2 \cdot 1 = a_{n-3,3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \dots = a_{n-m,m} \cdot m! = \\ &= a_{0,n} \cdot n! = a_n \cdot n! = f^{(n)}(0) \end{aligned}$$

1 Punkt

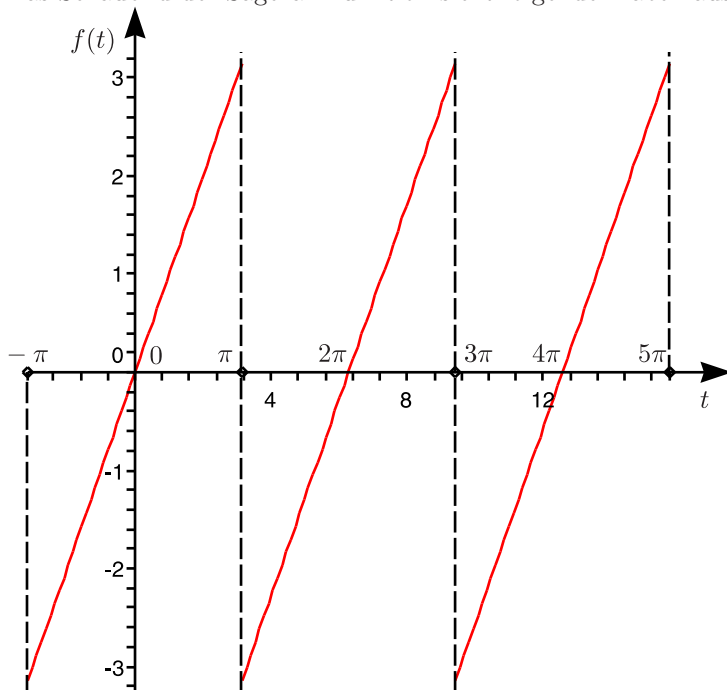
Damit ist die TAYLOR-Reihenentwicklung gezeigt.

Aufgabe 16

4 Punkte

a.)

Das Schaubild der Sägezahnfunktion sieht folgendermaßen aus:



Die Funktion ist periodisch; es ist $f(t) = t$ für $-\pi \leq t \leq +\pi$, $T = 2\pi$ und $\omega = 1$. Damit berechnen wir zuerst die Koeffizienten b_n nach der angegebenen Formel, wobei wir das Integral mittels partieller Integration auswerten wollen:

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} t \cdot \sin(n \cdot t) dt = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\sin(n \cdot t)}{n^2} - \frac{t \cdot \cos(n \cdot t)}{n} \right]_{-\pi}^{+\pi} = \boxed{\frac{2}{n} \cdot (-1)^{n+1}} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

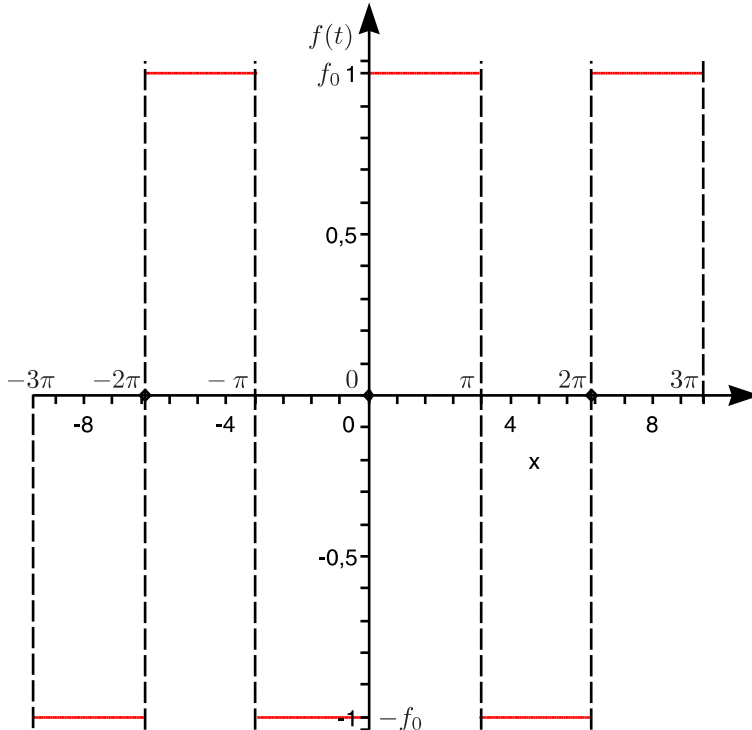
Die Koeffizienten a_n sind alle gleich 0, da $f(t)$ wegen $f(t) = f(-t)$ eine ungerade Funktion ist, $\cos(n \cdot t)$ jedoch eine gerade Funktion. Damit ist nämlich auch das Produkt dieser beiden Funktionen, also $t \cdot \cos(n \cdot t)$ ungerade und ein Integral einer ungeraden Funktion über das Intervall $[-\pi, +\pi]$ verschwindet. Damit lautet die FOURIER-Reihe unserer Sägezahnfunktion:

$$f(t) = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin(n \cdot t)$$

1 Punkt

b.)

Hier wollen wir dasselbe für eine Rechteckfunktion durchführen:



$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{für } 0 \leq t < \pi \\ -f_0 & \text{für } \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

Die Funktion ist 2π -periodisch, damit gilt $\omega = 1$. Die Funktion ist außerdem wieder ungerade, womit $a_n = 0$ gilt aus denselben Gründen wie beim ersten Aufgabenteil. Für b_n gilt:

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \cdot f_0 \cdot \left[\int_0^{\pi} \sin(n \cdot t) dt - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(n \cdot t) dt \right] = -\frac{f_0}{\pi} \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot t) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \cdot \cos(n \cdot t) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right] =$$

$$= \begin{cases} \frac{4 \cdot f_0}{n \cdot \pi} & \text{für ungerades } n \\ 0 & \text{für gerades } n \end{cases}$$

1 Punkt

Damit lautet die FOURIER-Reihe der Rechteckfunktion:

$$f(t) = \frac{4 \cdot t_0}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1) \cdot t]}{2n+1}$$

1 Punkt

Aufgabe 17

9 Punkte

a.)

Die Differentialgleichung für $v(t)$ lautet:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m} \cdot (-v^2 + v_e^2) \quad \text{mit } v_e = \sqrt{\frac{m \cdot g}{c}}$$

Wir lösen diese Differentialgleichung durch Trennung der Veränderlichen:

$$\frac{dv}{-v^2 + v_e^2} = -\frac{c}{m} dt$$

Durch Integration unter Verwendung der Anfangsbedingung $v(0) = 0$ ergibt sich:

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv'}{v_e^2 - v'^2} = -\frac{c}{m} \cdot \int_0^t dt' = -\frac{c}{m} \cdot t$$

Das Integral löst man geschickt mit Partialbruchzerlegung:

$$\int_0^{v(t)} \frac{dv'}{v_e^2 - v'^2} = \frac{1}{2v_e} \cdot \ln \left(\frac{v_e + v'}{v_e - v'} \right) \Big|_0^{v(t)} = \frac{1}{2v_e} \cdot \ln \left(\frac{v_e + v(t)}{v_e - v(t)} \right) - \frac{1}{2v_e} \cdot \ln(1) = \frac{1}{2v_e} \cdot \ln \left(\frac{v_e + v(t)}{v_e - v(t)} \right) \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

$$\ln \left(\frac{v_e + v(t)}{v_e - v(t)} \right) = 2v_e \cdot \frac{c}{m} \cdot t = -\frac{2 \cdot t}{\tau} \quad \text{mit } \tau = \sqrt{\frac{m}{g \cdot c}}$$

Nun müssen wir die Gleichung noch nach der gesuchten Funktion $v(t)$ auflösen:

$$\frac{v_e + v(t)}{v_e - v(t)} = \exp \left(-\frac{2 \cdot t}{\tau} \right) \Rightarrow v(t) = -v_e \cdot \frac{1 - \exp \left(-\frac{2 \cdot t}{\tau} \right)}{1 + \exp \left(-\frac{2 \cdot t}{\tau} \right)} = -v_e \cdot \tanh \left(\frac{t}{\tau} \right) \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

Da $\frac{dz}{dt} = v(t)$ gilt, müssen wir $v(t)$ einmal integrieren (siehe Aufgabe 4d), um daraus $z(t)$ zu erhalten:

$$\begin{aligned} z(t) - z_0 &= \int_0^t v(t') dt' = -v_e \cdot \int_0^t \tanh \left(\frac{t'}{\tau} \right) dt' \stackrel{x' = \frac{t'}{\tau}}{=} \\ &= -\frac{v_e \cdot \tau}{2} \cdot \int_0^x \frac{1 - \exp(-x')}{1 + \exp(-x')} dx' = -\frac{v_e \cdot \tau}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot t}{\tau} + 2 \cdot \ln \left(\frac{1 + \exp \left(-\frac{2 \cdot t}{\tau} \right)}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

$$\boxed{z(t) - z_0 = -v_e \cdot t - v_e \cdot \tau \cdot \ln \left(\frac{1 + \exp \left(-\frac{2 \cdot t}{\tau} \right)}{2} \right)} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

b.)

Für $t \ll \tau$ gilt mit der Entwicklung $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{1 + \exp \left(-\frac{2 \cdot t}{\tau} \right)}{2} \right) &= \ln \left(\frac{1 + 1 - \frac{2 \cdot t}{\tau} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot t}{\tau} \right)^2 + \dots}{2} \right) = \ln \left[1 - \frac{t}{\tau} + \left(\frac{t}{\tau} \right)^2 + \dots \right] = \\ &= -\frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{\tau^2} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{\tau^2} \right)^2 + \dots = -\frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Ort $z(t)$ und die Geschwindigkeit $v(t)$ in beiden Grenzfällen:

☞ Fall $t \ll \tau$:

$$z(t) - z_0 \approx -\frac{v_e}{2} \cdot \frac{t^2}{\tau} + \dots = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + \dots, \quad v(t) \approx -g \cdot t + \dots \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

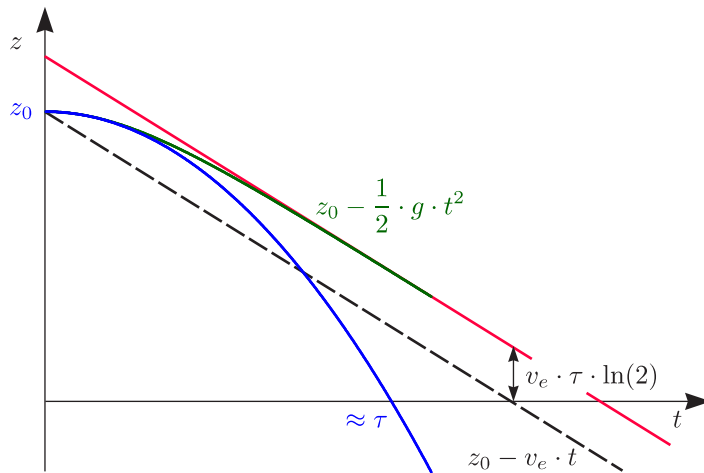
☞ Fall $t \gg \tau$:

$$z(t) - z_0 \approx -v_e \cdot t + v_e \cdot \tau \cdot \ln(2), \quad v(t) \approx -v_e \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

c.)

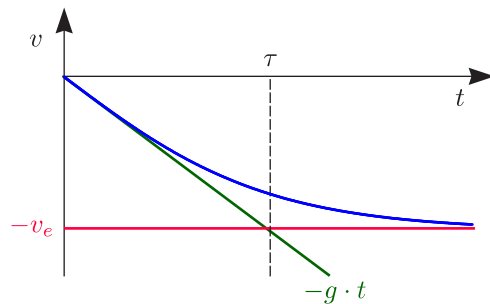
Anschließend wollen wir die Funktionen $z(t)$ und $v(t)$ mit ihren Näherungen für $t \ll \tau$ und $t \gg \tau$ skizzieren:

☞ Schaubild von $z(t)$:



1,5 Punkte

☞ Schaubild von $v(t)$:



1,5 Punkte

Aufgabe 18

8 Punkte

a.)

Wir nehmen an, dass die zeitabhängige Masse durch eine Funktion der Form

$$m_g = m_{g0} \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \text{ und } \frac{dm_g(t)}{dt} = -\frac{m_{g0}}{\tau}$$

beschrieben wird. Die Gesamtmasse ergibt sich aus der Masse der Rakete und der zeitabhängigen Masse des Treibstoffs, also $M = m_0 + m_g(t)$. Werten wir nun mit diesen Angaben die angegebene Differentialgleichung aus:

$$M(t) \cdot \frac{dv(t)}{dt} = -v_r \cdot \frac{dm_g(t)}{dt} = \frac{v_r \cdot m_{g0}}{\tau}$$

Weiterhin ergibt sich:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_r \cdot m_{g0}}{\tau} \cdot \frac{1}{m_0 + m_{g0} - \frac{m_{g0} \cdot t}{\tau}} \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{v_r}{\tau' - t} \text{ mit } \tau' = \left(\frac{m_0 + m_{g0}}{m_{g0}}\right) \cdot \tau}$$

1 Punkt

b.)

$$\int_0^v dv' = v_r \cdot \int_0^t dt' \frac{1}{\tau' - t'} \Rightarrow \boxed{v(t) = -v_r \cdot \ln\left(1 - \frac{t}{\tau'}\right)}$$

1 Punkt

c.)

$$v_e = v(\tau) = -v_r \cdot \ln\left(1 - \frac{\tau}{\tau'}\right) = -v_r \cdot \ln\left(1 - \frac{m_{g0}}{m_0 + m_{g0}}\right) = \boxed{-v_r \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 + m_{g0}}\right)} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

d.)

$$x(t) = \int_0^t dt' v(t') = -v_r \cdot \int_0^t dt' \ln\left(1 - \frac{t'}{\tau'}\right) = -v_r \cdot (-\tau') \cdot \int_1^{1-\frac{t}{\tau'}} dt'' \ln(t'') =$$
$$= \boxed{v_r \cdot \tau' \cdot \left[\left(1 - \frac{t}{\tau'}\right) \cdot \ln\left(1 - \frac{t}{\tau'}\right) + \frac{t}{\tau'} \right]} \quad \boxed{2 \text{ Punkte}}$$

e.)

Wir machen wieder Gebrauch von der Entwicklung $\ln(1+a) \approx a - \frac{a^2}{2} + \dots$

$$v(t) \approx (-v_r) \cdot \left(-\frac{t}{\tau'}\right) = \frac{v_r}{\tau'} \cdot t = \left(\frac{v_r \cdot m_{g0}}{\tau}\right) \cdot \frac{1}{m_0 + m_{g0}} \cdot t = \boxed{\frac{\text{Anfangskraft}}{\text{Anfangsmasse}} \cdot t} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

$$x(t) \approx \tau' \cdot v_r \cdot \left[\left(1 - \frac{t}{\tau'}\right) \cdot \left(-\frac{t}{\tau'} - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{\tau'^2}\right) + \frac{t}{\tau'} \right] =$$
$$= \tau' \cdot v_r \cdot \left[\frac{t^2}{\tau'^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{t}{\tau'}\right) \cdot (-1 + 1) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{\tau'}\right)^2 \right] \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

$$x(t) \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{v_r}{\tau'} \cdot t^2 = \boxed{\frac{1}{2} \cdot (\text{Anfangsbeschleunigung}) \cdot t^2} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

Das heißt, für kleine t reicht es, mit der Anfangsbeschleunigung zu rechnen, ohne die Zeitabhängigkeit zu berücksichtigen.