5. Übung zur Vorlesung	**Theoretische Physik A**
Universität Karlsruhe	**WS 2004/05**

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Vorrechnen: Freitag, 26.11.2004

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Die δ-Funktion:
Die Diracsche δ-Funktion ist durch die Eigenschaft

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f(x)\delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{wenn} \quad x_1 < x_0 < x_2 \, , \\ 0 & \text{wenn} \quad x_0 < x_1 \quad \text{oder} \quad x_2 < x_0 \, . \end{cases} \tag{1}$$

definiert. Intuitiv gilt, dass $\delta(0) = \infty$ und $\delta(x \neq 0) = 0$.
Im Folgenden sei $x_1 < 0 < x_2$. Formal mathematisch handelt es sich nicht um eine Funktion sondern um eine *Distribution.*

a) Was ist $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \sin x \, \delta(x)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \cos x \, \delta(x)$?
(1 Punkt)

b) Zeigen Sie (durch Substitution $y = ax$ und Beachtung der Integrationsgrenzen!), dass $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$, indem Sie zeigen dass

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, f(x) \, \delta(ax) = \frac{1}{|a|} f(0). \tag{2}$$

(1 Punkt)

c) *Ableitung der δ-Funktion:* Zeigen Sie dass die Definition der Ableitung der δ-Funktion durch

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \, f(x) \, \delta'(x) = -f'(0). \tag{3}$$

formal durch partielle Integration aus der Definition der δ-Funktion erhalten werden kann. Was wäre demnach eine sinnvolle Definition der zweiten Ableitung der δ-Funktion? (2 Punkte)

Aufgabe 20 (6 Punkte)

Darstellungen der δ-Funktion:

a) *Lorentzfunktion-Darstellung:* Zeigen Sie, dass folgender Limes der Lorentzfunktion $f_L(x)$,

$$\delta_L(x) = \lim_{\alpha \to 0} f_L(x), \qquad \text{wobei} \qquad f_L(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+\alpha^2)} \, , \tag{4}$$

eine Darstellung der δ-Funktion ist, indem sie die Lorentzfunktion zeichnen (Breite und Höhe andeuten!), und zeigen dass $\delta_L(0) = \infty$, $\delta_L(x \neq 0) = 0$, und $\int_{x_1}^{x_2} dx \, \delta_L(x) = 1$ wenn $x_1 < 0 < x_2$. (2 Punkte)

b) *Gaussfunktion-Darstellung:* Gehen Sie analog vor, um zu zeigen dass

$$\delta_G(x) = \lim_{\alpha \to 0} f_G(x), \qquad \text{wobei} \qquad f_G(x) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}} \, , \tag{5}$$

eine Darstellung der δ-Funktion ist. (2 Punkte)

c) *Integral-Darstellung:* Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} = \delta(x)$, indem Sie zeigen, dass der Ausdruck

$$\lim_{\alpha \to 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx - \alpha|k|} \right] \tag{6}$$

die Lorentzfunktion-Darstellung von (2a) liefert.
(*Hinweis:* Teilen Sie das Integral in $\int_{-\infty}^{0} dk + \int_{0}^{\infty} dk$ auf.) (2 Punkte)

Aufgabe 21 (5 Punkte)

<u>Mittelwellenradio:</u>
Ein Mittelwellenradiosender sendet ein Signal mit einer Trägerfrequenz ν_c aus. Die eingestrahlten Radiowellen induzierenden eine oszillierende Spannung $V_0 \cos(\omega_c t)$ in der Antenne, wobei $\omega_c = 2\pi\nu_c$. Die Antenne wirkt als Wechselspannungsquelle für einen LCR-Stromkreis, und das vom Empfänger produzierte Signal ist die Spannung $V_C(t)$, die über dem Kondensator C abfällt. L ist die Induktanz, C die Kapazität und R der Widerstand des LCR-Stromkreises. Nehmen Sie an, dass $R \ll \omega_c L$ und $R \ll \sqrt{L/C}$.

a) Die Differentialgleichung für den LCR-Stromkreis,

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + Q(t)/C = V_0 \cos(\omega_c t)\,, \tag{7}$$

kann in die Form der Gleichung für einen getriebenen harmonischen Oszillator,

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f \cos(\omega_c t) \tag{8}$$

gebracht werden. Was sind x, γ, ω_0 und f als Funktionen von R, C, L, V_0 und der Ladung Q auf dem Kondensator? (1 Punkt)

b) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (7). (1 Punkt)

c) Berechnen Sie, auf welchen Wert die Induktanz L eingestellt werden muss, damit der Stromkreis in Resonanz mit dem eingestrahlten Signal ist. (Dieses ist die Größe, die bei einem Radio geändert wird, wenn man die Station einstellt.) *Hinweis:* Nehmen Sie an, dass der Widerstand R so klein ist, dass er die Resonanzfrequenz nicht wesentlich beeinflusst. (1 Punkt)

d) Berechnen sie die Amplitude $V_{C,max}$ der Kondensatorspannung $V_C(t) = Q(t)/C$ als Funktion von V_0, γ und ω_c im Resonanzfall für $t \gg 1/\gamma$. [Das Verhältnis $V_{C,max}/V_0$ wird die *Verstärkung* des Stromkreises genannt.] (1 Punkt)

e) Eine andere Station sendet mit einer anderen Trägerfrequenz ν_c'. Wenn der Empfänger nach wie vor auf die erste Sendefrequenz ν_c eingestellt ist, gilt die Resonanzbedingung von c) nicht für die zweite Station; folglich werden deren Signale viel schwächer verstärkt als die der ersten, mit Amplitude $V_{C,max}'$. Berechnen Sie das Verhältnis der Verstärkungsamplituden, $V_{C,max}'/V_{C,max}$, als Funktion von ω_c'/ω_c und γ/ω_c. Skizzieren Sie $V_{C,max}'/V_{C,max}$ als Funktion von ω_c'/ω_c. (1 Punkt)