

LÖSUNGSVORSCHLAG THEORETISCHE PHYSIK A FÜNFTES ÜBUNGSBLATT

Prof. Dr. Schön und Dr. Eschrig

Wintersemester 2004/2005

Aufgabe 19

4 Punkte

a.)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) \cdot \delta(x) \, dx = \sin(0) = \boxed{0}$$

0,5 Punkte

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x) \cdot \delta(x) \, dx = \cos(0) = \boxed{1}$$

0,5 Punkte

b.)

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \delta(a \cdot x) \, dx \stackrel{a \cdot x = y}{=} \begin{cases} \int_{a \cdot x_1}^{a \cdot x_2} \frac{dy}{a} \cdot f\left(\frac{y}{a}\right) \cdot \delta(y) & \text{für } a > 0 \\ - \int_{a \cdot x_2}^{a \cdot x_1} \frac{dy}{a} \cdot f\left(\frac{y}{a}\right) \cdot \delta(y) & \text{für } a < 0 \end{cases} =$$

1 Punkt

$$= \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot f(0) & \text{für } a > 0 \\ -\frac{1}{a} \cdot f(0) & \text{für } a < 0 \end{cases} = \boxed{\frac{1}{|a|} \cdot f(0)}$$

c.)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \delta'(x) \, dx = \underbrace{f(x) \cdot \delta(x)}_{=0} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x) \cdot \delta(x) \, dx = \boxed{-f'(0)}$$

1 Punkt

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \delta''(x) \, dx = \underbrace{f(x) \cdot \delta'(x)}_{=0} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x) \cdot \delta'(x) \, dx = \boxed{f''(0)}$$

1 Punkt

Aufgabe 20

6 Punkte

a.)

$$I = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{x^2 + \alpha} \right) \, dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\alpha}\right) \Big|_{x_1}^{x_2} =$$

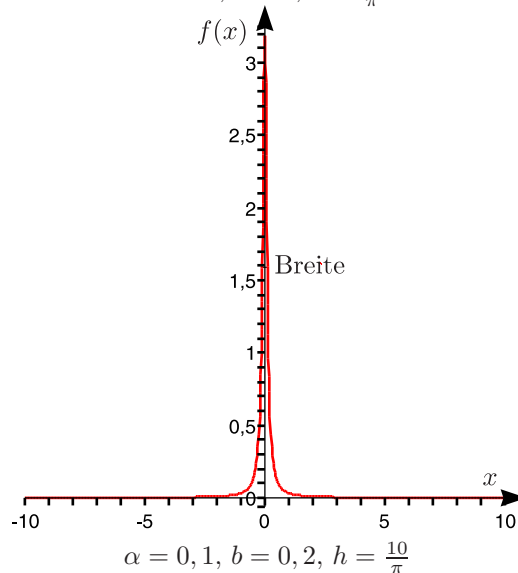
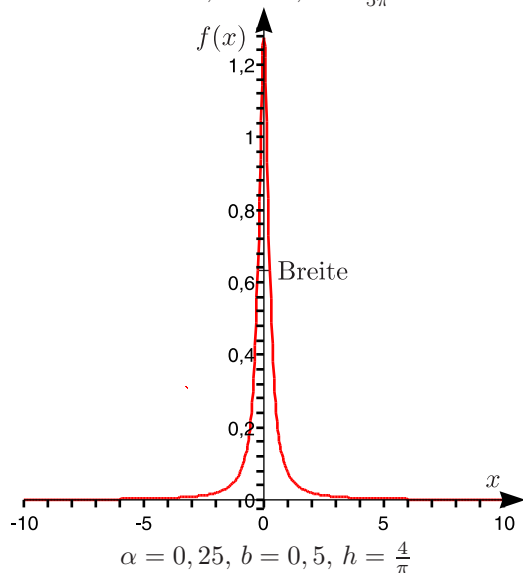
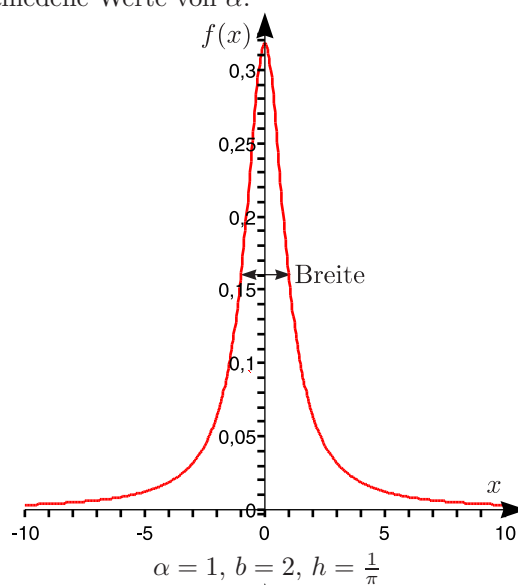
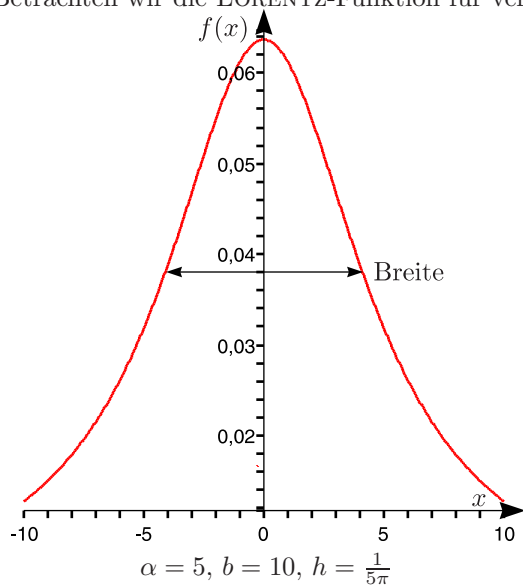
1 Punkt

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \cdot \left(\arctan\left(\frac{x_2}{\alpha}\right) - \arctan\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \boxed{1}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi \cdot (0 + \alpha^2)} = \boxed{\infty}, \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi \cdot (x^2 + \alpha^2)} \xrightarrow{\alpha^2 \ll x^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\pi \cdot x^2} = \boxed{0 \text{ falls } x \neq 0}$$

1 Punkt

Betrachten wir die LORENTZ-Funktion für verschiedene Werte von α :



Die Höhe h der LORENTZ-Funktion ergibt sich aus dem Funktionswert an der Stelle $x = 0$:

$$h = f_L(0) = \frac{\alpha}{\pi \cdot (0^2 + \alpha^2)} = \boxed{\frac{1}{\pi \cdot \alpha}}$$

Die Breite ergibt sich aus dem Abstand der beiden x -Werte, bei denen die Funktion auf die halbe Höhe abgefallen ist:

$$f_L(x) \stackrel{!}{=} \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{\pi \cdot (x^2 + \alpha^2)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2\pi \cdot \alpha}$$

Wir dividieren durch $\alpha \neq 0$ und erhalten:

$$\frac{1}{\pi \cdot (x^2 + \alpha^2)} = \frac{1}{2\pi \cdot \alpha^2}$$

Vergleicht man nun linke und rechte Seite, so erkennt man, dass die Gleichung für $x = \pm\alpha$ erfüllt ist; also folgt daraus die Breite zu $b = \alpha - (-\alpha) = 2\alpha$.

b.)

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) dx \stackrel{\frac{x}{\alpha} = y}{=} \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{x_1}{\alpha}}^{\frac{x_2}{\alpha}} \exp(-y^2) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-y^2) dy = 1$$

1 Punkt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \exp(-0) = \boxed{\infty}, \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = \boxed{0 \text{ für } x \neq 0}$$

1 Punkt

c.)

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp[+ikx - \alpha \cdot |k|] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{dk}{2\pi} [\exp(ikx - k\alpha) + \exp(-ikx - k\alpha)] = \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\frac{\exp(ikx - k\alpha)}{i \cdot x - \alpha} + \frac{\exp(-ikx - k\alpha)}{-i \cdot x - \alpha} \right]_0^{\infty} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2\pi} \right) \cdot \left[\frac{1}{i \cdot x - \alpha} + \frac{1}{-i \cdot x - \alpha} \right] = \\ = -\frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{i \cdot x - \alpha - i \cdot x - \alpha}{\alpha^2 - (i \cdot x)^2} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} = \delta(x)$$

2 Punkte

Aufgabe 21

5 Punkte

a.)

Führen wir die Substitutionen

$$x = Q, \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, f = \frac{V_0}{L} \text{ und } \gamma = \frac{R}{2L}$$

durch, so erhalten wir aus der Differentialgleichung für den getriebenen harmonischen Oszillator

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \cdot \dot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = f \cdot \cos(\omega_c \cdot t)$$

die Differentialgleichung für den LCR-Stromkreis:

$$\ddot{Q}(t) + 2 \cdot \frac{R}{2L} \cdot \dot{Q}(t) + \frac{1}{LC} \cdot Q(t) = \frac{V_0}{L} \cdot \cos(\omega_c \cdot t) \Rightarrow \boxed{L \cdot \ddot{Q}(t) + R \cdot \dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = V_0 \cdot \cos(\omega_c \cdot t)}$$

1 Punkt

b.)

Nach Aufgabenstellung soll $R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$, also $\gamma \ll \omega_0$ gelten; es handelt sich dabei um den **unterdämpften** Fall (**Schwingfall**) des harmonischen Oszillators. Infolgedessen erhält man die Lösung der obigen Differentialgleichung durch Addition (Superposition) der homogenen Lösung, welche dem Schwingfall entspricht, und der inhomogenen Lösung des getriebenen Oszillators. In der Vorlesung wurde die Differentialgleichung des getriebenen harmonischen Oszillators gelöst:

$$x(t) = a \cdot \exp(-\gamma \cdot t) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \alpha) + \frac{f \cdot \cos\left(\omega_c \cdot t - \arctan\left[\frac{2\gamma \cdot \omega_c}{\omega_0^2 - \omega_c^2}\right]\right)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_c^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega_c^2}} \text{ mit } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Daraus folgt dann die Lösung für den LCR-Stromkreis mit $Q(t) = x(t)$ und den Definitionen aus Aufgabenteil a.)

$$\boxed{Q(t) = a \cdot \exp\left(-\frac{R}{2L} \cdot t\right) \cdot \cos(\Omega \cdot t + \alpha) + \frac{\frac{V_0}{L} \cdot \cos\left(\omega_c \cdot t - \arctan\left[\frac{R \cdot C \cdot \omega_c}{1 - L \cdot C \cdot \omega_c^2}\right]\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega_c^2\right)^2 + \frac{R^2}{L^2} \cdot \omega_c^2}}, \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}$$

1 Punkt

c.)

Allgemein tritt Resonanz bei $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ auf. Da wir hier jedoch annehmen, dass $\gamma \ll \omega_0$ ist, haben wir in guter Näherung Resonanz, wenn die äußere Frequenz ω_c der Eigenfrequenz des Oszillators entspricht, also $\omega_c \simeq \omega_0$. Um die Frequenz ω_c einzustellen, müssen wir die Induktanz L also wie folgt ändern:

$$L = \frac{1}{C \cdot \omega_c^2} = \boxed{\frac{1}{(2\pi\nu_c)^2 \cdot C}} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

d.)

$$V_{C,max} = \frac{Q_{max}}{C}$$

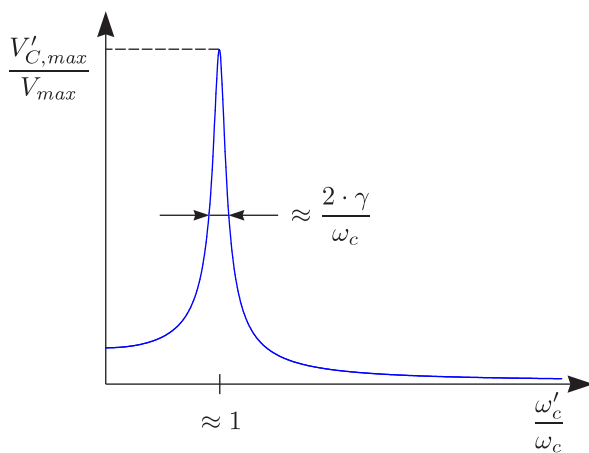
Für $\omega_c = \omega_0$ folgt die maximale Auslenkung des mechanischen harmonischen Oszillators $x_{max} = \frac{f}{2\gamma\omega_c}$. Damit gilt für die maximale Spannung:

$$V_{C,max} = \frac{f}{2\gamma \cdot \omega_c \cdot C} = \frac{V_0}{2\gamma \cdot \omega_c \cdot LC} \stackrel{\omega_0^2 = \omega_c^2}{=} \frac{V_0}{2\gamma \cdot \omega_c \cdot \frac{1}{\omega_c^2}} = \boxed{\frac{V_0}{2 \cdot \left(\frac{\gamma}{\omega_c}\right)}} \quad \boxed{1 \text{ Punkt}}$$

e.)

Die Resonanzbedingung gilt nicht mehr für $\omega'_c = 2\pi\nu'_c$. Wir berechnen das Verhältnis der Signal-Amplituden beider Stationen, wobei der Empfänger noch auf die erste Sendefrequenz $\omega_0 = \omega_c$ eingestellt ist:

$$\frac{V'_{max}}{V_{max}} = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_c'^2)^2 + 4\gamma^2 \cdot \omega_c'^2}} \cdot \frac{2\gamma \cdot \omega_c}{f} = \boxed{\frac{\frac{2\gamma}{\omega_c}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega'_c}{\omega_c}\right)^2\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\gamma}{\omega_c}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega'_c}{\omega_c}\right)^2}}}$$



1 Punkt

Eigentlich liegt auch hier das Extremum bei:

$$\frac{\omega'_c}{\omega_c} = \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\gamma^2}}{\omega_c}$$

Für $\omega_c \gg \gamma$ liegt es aber in guter Näherung bei $\frac{\omega'_c}{\omega_c} = 1$.