6. Übung zur Vorlesung Theoretische Physik A
Universität Karlsruhe WS 2004/05

Prof. Dr. Gerd Schön— Dr. Matthias Eschrig

www-tfp.physik.uni-karlsruhe.de/Lehre/
Vorrechnen: Freitag, 03.12.2004
Hinweis: Die erste Klausur zur Vorlesung findet am Freitag, den 17.12.2004 ab 15:00 Uhr im Gerthsen-Hörsaal statt.

Aufgabe 22 (4 Punkte)

Die θ-Funktion:
Die Heavisidesche θ-Funktion ist durch die Eigenschaft

$$\theta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < a \\ 1/2 & \text{für} \quad x = a \\ 1 & \text{für} \quad x > a \end{cases} \tag{1}$$

definiert. Sie zeichnet sich durch einen Einheitssprung bei $x = a$ aus.

a) Stellen Sie die Funktion $|x|$ mit Hilfe der θ-Funktion dar. (1 Punkt)

b) Wir wollen zeigen, dass im Distributionssinne die Ableitung der θ-Funktion die Diracsche δ-Funktion ergibt, d.h. dass

$$\frac{\mathrm{d}\theta(\mathrm{x})}{\mathrm{d}x} = \delta(x) \ . \tag{2}$$

Zeigen Sie dazu, dass für jede stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}\theta(\mathrm{x})}{\mathrm{d}x} \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = f(0) \ . \tag{3}$$

für beliebige $x_1 < 0 < x_2$ gilt (Hinweis: partielle Integration). (1 Punkt)

c) Finden Sie eine Darstellung der θ-Funktion als Grenzwert einer Funktionenfolge, indem Sie die Lorentzfunktion-Darstellung der Deltafunktion verwenden. (Hinweis: Benutzen Sie b) und integrieren Sie die Lorentzfunktion) (2 Punkte)

Aufgabe 23 (9 Punkte)

Fourier-Reihen und Fourier-Integrale:
In Aufgabe 16 haben wir die Fourierreihenentwicklung einer periodischen Funktion kennengelernt. Eine andere Möglichkeit einer Fourierreihenentwicklung ist durch komplexe Darstellung

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{i\omega n t} \tag{4}$$

gegeben, wobei $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a) Drücken Sie die Koeffizienten c_n durch die Koeffizienten a_n und b_n aus Aufgabe 16 aus. (4 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass die inverse Transformation durch

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-i\omega n t}\ \mathrm{d}t \tag{5}$$

gegeben ist. (2 Punkte)

c) Wir wollen nun die Periode T gegen unendlich gehen lassen, d.h. $\omega \to 0$. Dann liegen die Werte für $\Omega = n\omega = 2\pi n/T$ dicht auf der Zahlengeraden. Wir können dann die Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ in ein Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\Omega$ überführen, wobei $\Delta\Omega = 2\pi/T \to \mathrm{d}\Omega$ im Limes $T \to \infty$. Wir schreiben formal $c(\Omega) \equiv c(2\pi n/T) = c_n$. Zeigen Sie, dass dann die Funktion $f(t)$ durch

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} \cdot \tilde{f}(\Omega) \cdot e^{i\Omega t} \tag{6}$$

ausgedrückt werden kann. Bestimmen Sie $\tilde{f}(\Omega)$ als Funktion von $c(\Omega)$ und T. Bestimmen Sie aus Gleichung (5) auch die inverse Transformation, d.h. bestimmen Sie $\tilde{f}(\Omega)$. (3 Punkte)

Aufgabe 24 (7 Punkte)

Einschwingvorgang bei getriebenem harmonischen Oszillator:
Wir wollen noch einmal den unterdämpften Fall des getriebenen harmonischen Oszillators

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f\cos(\omega_c t) \tag{7}$$

im Resonanzfall $\omega_c = \omega_0$ betrachten. Die Anfangsbedingungen seien mit

$$x(t=0) = 0 \qquad \dot{x}(t=0) = 0 \tag{8}$$

gegeben.

a) Geben Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ als Funktion von γ, f und ω_0 für die angegebenen Anfangsbedingungen an. (2 Punkte)

b) Nehmen Sie nun an, dass $f = \sqrt{2} \cdot \omega_0^2$ und $\omega_0 = \sqrt{2} \cdot \gamma$. Berechnen Sie die homogene und partikuläre Lösung für diesen Fall. Zeichnen Sie qualitativ die Auslenkung x als Funktion von γt für $\gamma t = 0 \cdots 5$ jeweils für die homogene Lösung, die partikuläre Lösung und die allgemeine Lösung. (5 Punkte)